UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

SECÇÃO AUTÓNOMA DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS

CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO

PROCESSOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

UMA ABORDAGEM À CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTO MATEMÁTICO POR CRIANÇAS DO ENSINO PRIMÁRIO

Por

MARIA ISABEL VALENTE PIRES

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Ciências de Educação - Educação e Desenvolvimento - pela Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, sob orientação conjunta da Professora Doutora Teresa Ambrósio e do Dr. António Jorge Andrade.

LISBOA

1992

Ao Zé

Por todo o seu apoio e incentivo,

com muito amor

SUMÁRIO

Um olhar sobre a Educação Matemática revela-nos a importância que a resolução de problemas tem vindo a assumir nos últimos tempos, não só como uma das suas principais finalidades, mas ainda como meio privilegiado de construção do conhecimento.

O modelo de ensino e aprendizagem da Matemática elaborado para o Projecto «Ensinar é Investigar» centrou-se na resolução de problemas considerada nessa dupla perspectiva. A metodologia utilizada conferia grande liberdade à criança para procurar as suas próprias estratégias e construir processos de resolução de problemas.

Com o presente estudo procurou-se analisar esses processos construídos pelas crianças para encontrarem a solução dos problemas que lhes eram propostos. Uma metodologia de investigação de cariz essencialmente qualitativo, por vezes apoiada em tratamentos estatísticos, permitiu detectar a utilização regular de algumas estratégias bem como a existência de relações entre os processos construídos por cada criança e o seu nível de competência matemática. Pudemos igualmente verificar a influência da expressão icónica no desenvolvimento do raciocínio operatório e da representação simbólica e a forma como os iniciais processos ingénuos das crianças evoluíram ao longo dos quatro anos do Ensino Primário para outros mais elaborados e formais. A existência de relações entre as estratégias utilizadas na resolução de problemas e o nível de factor geral de inteligência dado pelas matrizes de Raven não surgiu como evidente.

PALAVRAS-CHAVE

Matemática, ensino/aprendizagem da Matemática, resolução de problemas, processos de resolução de problemas, estratégias de resolução de problemas, ensino primário

ABSTRACT

An examination of the Mathematical Education reveals the important place that problem solving has assumed recently, not only as one of its main purposes but also as a widely accepted method of building knowledge.

The focal point of the standard for teaching and learning mathematics developed for the Project «Teaching is Researching» is problem solving seen from these two perspectives. The methodology used gives the child great freedom to search for its own strategies and to build processes for the problem solving.

This study set out to analyse the processes created by the children in order to find solutions to the problems that they were confronted with. Basically qualititive research methodology, at times supported by statistical analysis, enabled us to detect the regular use of certain strategies as well as the existence of relationships between processes built by each child and the level of its mathematic aptitude. We were also able to check the influence of iconic expression on the development of operating reasoning and symbolic representation, and the way in which the child's initially naive processes developed over the four years of Primary Instruction towards more elaborate and formal ones. The existence of relationships between strategies used in problem solving and the level of the g factor of intelligence shown by the Raven Matrixes did not clearly emerge.

KEYWORDS

Mathematics, teaching/learning of Mathematics, problem solving, processes of problem solving, strategies of problem solving, primary education

RESUMÉ

Un regard sur l'Éducation Mathématique nous montre l'importance que la résolution des problèmes a assumé ces derniers temps, non seulement comme l'une de ses principaux objectifs, mais aussi comme un moyen privilégié de construction de conaissances.

Le modèle d'enseignement et d'apprentissage de la Mathématique élaboré pour le Project «Enseigner c'est Rechercher», s'est centré sur la résolution des problèmes, considérée sous cette double perspective.

La méthodologie y utilisée donnait à l'enfant la liberté de chercher ses propres stratégies, de construire des procédés de résolution des problèmes. Dans cette étude on a essayé d'analyser les differents procédés construits par les enfants pour trouver la solution des problèmes qu'on leur proposait. Une méthodologie d'investigation essentiellement qualititative, fondée, quelquefois, sur des statistiques, a permis de détecter l'utilization régulière de differentes stratégies et l'éxistence de rapports entre les procédés construits par chaque enfant et son niveau de compétence mathématique. En même temps, on a pu vérifier l'influence de l'expression iconique sur le dévelopment du raisonnement opératif et de la représentation symbolique ainsi que l'évolution des premiers procédés naif des enfants vers d'autres plus élaborés et formels, le long des quattre ans de l'École Primaire. L'existence d'un rapport entre les stratégies utilisées dans la résolution des problèmes et le niveau du facteur général d'inteligence donné par les matrices de Raven n'est pas évidente.

MOTS CLÉS

Mathématiques, enseignement/apprentissage des mathématiques, résolution de problèmes, procédés de resolution des problèmes, stratégies de résolution des problèmes, enseignement élémentaire.

ÍNDICE de MATÉRIAS

ÍNDICE de FIGURAS

ÍNDICE de QUADROS

INTRODUÇÃO

Toda a educação deve ser um processo de autonomia progressiva, que se conquista em cada novo instante. Assim sendo, educador é aquele que acredita nas capacidades futuras e actuais dos mais novos, que respeita a natureza do seu ser, a sua forma de estar e de se expressar, os seus anseios. É aquele que ajuda a descobrir e construir um projecto de vida.

Este pensamento tem dado sentido à minha vida profissional, transformando um itinerário algo acidentado num todo coerente no seu significado subjectivo. E tem possivelmente influenciado o meu fascínio pela infância. De facto, quanto mais pequeno é o ser que nos é entregue, maior é o desafio, mais forte tem de ser a aposta nas suas potencialidades.

Foi assim que, à excepção dos dois primeiros anos de vida profissional, passados numa escola de ensino secundário e preparatório, todos os restantes foram dedicados à infância, nomeadamente à educação pré-escolar e ao ensino primário. E até esses primeiros anos adquirem sentido a essa luz, na medida em que, uma vez a experiência passada, uma ideia ficou: a parte mais decisiva da educação matemática desses jovens, ou quase-jovens, devia ter acontecido algures, numa outra escola, antes de eles terem passado a fazer parte do meu universo.

Por tal razão, e após me ter debruçado sobre alguma literatura teórica e de investigação e tomado contacto com experiências que em Portugal ou no estrangeiro se iam realizando, decidi ir eu própria ensinar crianças numa escola infantil e primária, experiência geralmente vedada a quem não possui a habilitação académica legalmente admitida como adequada a tal fim.

Posso hoje dizer que foi a vivência profissional mais forte e mais rica em aquisição de conhecimento, e mesmo a que mais implicações teve a nível da produção de saber. Eles, os pequenos alunos, mostraram-se seres cheios de potencialidades, verdadeiramente capazes de construírem o seu próprio conhecimento. Apenas um pouco inseguros daquilo de que são capazes, talvez porque habituados à falta de confiança que normalmente os adultos neles depositam.

Não será isso, afinal, o que emerge do simples facto de que, na escola, tudo aquilo que se faz deve ser feito como o adulto, o professor, indica e "ensina", sem deixar margem à livre iniciativa das próprias crianças, à sua criatividade, à sua capacidade para construir conhecimento e produzir saber? E afinal é apenas necessário... proporcionar-lhes o ambiente pedagógico adequado ao desenvolvimento de todas as suas potencialidades.

E foi para descobrir as características desse ambiente pedagógico e a forma como aí se desenvolve a aprendizagem, que me integrei, em certo momento, numa experiência que decorria no ensino primário, o Projecto «Ensinar é Investigar». Tratava-se de uma investigação-acção, na qual um grupo de professores-investigadores, de que eu fazia parte, e um grupo de professores que prosseguiam na prática pedagógica, se aliaram para investigar, para tentar descobrir algo mais do modo como aprendem as crianças e de como deve ser o ensino para possibilitar e potencializar essa aprendizagem.

Nesse Projecto fui responsável pelos aspectos do *modelo pedagógico* relacionados com o *ensino e aprendizagem da Matemática*, bem como pela elaboração dos testes de avaliação da aprendizagem relativos a esta ciência.

Fui co-responsável, como membro da equipa de investigadores, pela concepção do sistema de referências, a elaboração do plano de intervenção e o acompanhamento do Projecto.

No decurso do Projecto «Ensinar é Investigar», muitos foram os dados recolhidos com a finalidade de avaliar os objectivos que haviam sido propostos.

Uma parte desses dados acabou por se revelar útil de uma outra maneira. Com efeito, no domínio da Matemática o modelo pedagógico do Projecto valorizava a resolução de problemas como um *objectivo* fundamental da aprendizagem e como um *meio privilegiado* de construção de conceitos e aquisição de técnicas. Tal preocupação pedagógica produziu os seus frutos. As crianças revelaram-se bons resolvedores de problemas, simultaneamente criativos e críticos. Uma primeira análise dos dados recolhidos fez realçar uma grande diversidade nas estratégias utilizadas pelas crianças para resolverem os problemas. Parecia-me bastante aliciante, e simultaneamente útil, tentar aprofundar algumas características desses trabalhos das crianças, até porque o assunto "resolução de problemas" sempre despertou em mim um grande interesse.

E foi assim que, partindo desses registos escritos que nos revelavam a forma como aquelas crianças haviam resolvido um conjunto razoavelmente grande de problemas, me propus realizar o presente trabalho de investigação no âmbito do Mestrado em Ciência da Educação, Educação e Desenvolvimento.

Mais do que os resultados obtidos, ou a influência de factores diversos, intrínsecos ou extrínsecos à criança, na obtenção desses resultados, interessavam-me os processos. Este estudo procura assim analisar esses processos construídos pelas próprias crianças para a resolução de problemas, as estratégias a que recorrem com maior frequência e a forma como evoluem ao longo dos anos.

O estudo estrutura-se em quatro partes.

Numa primeira parte procura-se contextualizar a investigação, definir a problemática e as questões a investigar e referir a grande mobilização que o tema "resolução de problemas" tem vindo a provocar nos meios da Educação Matemática, a nível de investigadores e responsáveis.

Numa segunda parte traçam-se as grandes linhas definidoras do modelo pedagógico que orientou o ensino e consequente aprendizagem na experiência que esteve na base da presente investigação.

Os procedimentos efectuados para analisar os dados, no sentido de responder às questões em estudo, encontram-se descritos na terceira parte.

Finalmente, numa quarta parte procuram tirar-se conclusões da investigação efectuada.

PARTE I

PROBLEMÁTICA, CONTEXTO E REVISÃO DE LITERATURA

CAPÍTULO 1

CONTEXTO E PROBLEMÁTICA DO ESTUDO

Para que a inovação aconteça é necessário que alguns arrisquem mudar.

Nas últimas décadas têm-se vindo a desenvolver, no nosso país, alguns projectos que procuram abalar os alicerces do velho sistema educativo e instaurar um certo clima de mudança. Podemos recordar, para só referir o ensino primário, o projecto de renovação do ensino da Matemática da Fundação Calouste Gulbenkian, que trouxe perspectivas verdadeiramente inovadoras neste domínio e, mais recentemente, os Projectos «Eco», «Minerva»[1] e «Ensinar é Investigar» entre outros.

Foi no âmbito deste último Projecto que se recolheram dados que, pelo interesse que nos pareceram ter para o estudo dos processos de resolução de problemas em Matemática, procurámos analisar por meio do presente trabalho de investigação. Por tal razão, importa caracterizar globalmente o referido Projecto. É o que procuraremos fazer na primeira parte deste capítulo.

Numa segunda parte define-se o tema a estudar, estabelecendo a problemática e as questões de investigação.

---

[1] O Projecto Minerva não se restringe ao ensino primário.

1.1 O PROJECTO «ENSINAR É INVESTIGAR»

O Projecto «Ensinar é Investigar» desenvolveu-se no 1º Ciclo do Ensino Básico.

Decorreu sob a *supervisão* do Professor Doutor Nicolau Raposo da Faculdade de Psicologia da Universidade de Coimbra.

Procurando responder a preocupações de inovação, de formação de competências e de investigação, o projecto foi-se perspectivando segundo os parâmetros de uma *investigação-acção*[2].

De inovação, na medida em que, face ao tipo de ensino praticado, nos parecia pertinente a criação de um modelo inovador que viesse dar resposta a algumas das inquietações sentidas pelos professores.

De formação de competências, no sentido de desenvolver, nos professores, as capacidades científicas e pedagógicas indispensáveis a uma boa gestão desse modelo de ensino.

De investigação, uma vez que nos interessava não só averiguar do sucesso do modelo construído mas ainda investigar a existência de relações entre a elaboração de conceitos por tratamento da informação e o desenvolvimento das linguagens verbal e visual e das operações lógicas.

Foi realizado por uma *equipa* constituída por dois grupos: um grupo de (professores) investigadores - Grupo I - e um outro grupo de professores directamente ligados à prática pedagógica - Grupo II. O primeiro responsabilizou-se pela elaboração e acompanhamento de todo o Projecto. Era constituído por cinco professores licenciados nas várias áreas do conhecimento que integram o currículo do Ensino Primário. O segundo grupo era formado por doze professores do nível de ensino referido, que se responsabilizavam essencialmente pelo trabalho de campo. A coordenação geral de toda a equipa foi efectuado

[2] Quando o Projecto se iniciou não existia uma consciência clara de se tratar de uma investigação-acção. Todavia, um olhar retrospectivo sobre a forma como o Projecto se foi operacionalizando, leva-nos a considerá-lo como uma investigação deste tipo.

por um dos elementos do Grupo I, a Drª Maria da Luz Leitão, a quem se ficou a dever a iniciativa do Projecto.

As doze turmas ligadas aos professores do Grupo II situavam-se em vários pontos do País, distribuindo-se por zonas urbanas, suburbanas e rurais. Integravam-nas cerca de duzentas e quarenta crianças que constituíram a *amostra* do trabalho de investigação. Algumas características dessa amostra podem ser consultadas nos Quadros A e B do Anexo I.

Foram essas crianças verdadeiramente o centro de todo o processo, estimulando a equipa a encontrar formas mais adequadas de propiciar a aprendizagem e fornecendo o "feedback" indispensável ao reajustamento do processo à medida que este se ia desenvolvendo.

Partiu-se de um referencial teórico com vertentes no domínio da epistemologia, de diversos ramos das Ciências da Educação e ainda das áreas do conhecimento que integram o currículo do ensino primário. Este quadro teórico foi designado por *sistema de referências*.

A partir deste referencial foi traçado um *plano de intervenção*. Este plano propunha a concepção de um *modelo pedagógico* e a sua aplicação em três etapas.

A primeira etapa decorreu no ano lectivo de 1978/79 e nela se realizou um primeiro estudo piloto. Foi pensada com a finalidade de averiguar a adaptabilidade dos professores a um tipo de ensino claramente inovador, na medida em que assumia que a criança deve construir o seu próprio conhecimento.

Durante a segunda etapa, 1980/81 e 1981/82, desenvolveu-se um segundo estudo piloto para investigar qual a reacção dos alunos, a nível de atitudes, face à postura pedagógica acima referida. Como variáveis independentes desse estudo consideraram-se o "meio geográfico", o "estatuto sócio-cultural e económico", o "tipo de estabelecimento de ensino"[3] e a "preparação pré-escolar".

O estudo principal foi implementado durante os anos de 1983/84, 1984/85, 1985/86, 1986/87 e nele se aplicou o modelo

[3] Ensino oficial e particular.

pedagógico, construído pelo Grupo I, a todos os sujeitos da amostra, durante os quatro anos em que frequentaram o Ensino Primário.

O modelo pedagógico integra todas as áreas envolvidas num trabalho que se desenvolve em torno de temas do Meio Físico e Social. O tratamento de cada tema efectua-se através de "actividades nucleares" e a partir destas surgem "actividades decorrentes" dos domínios da Língua Materna e da Matemática. As actividades decorrentes são programadas semana a semana com algum detalhe. Na Figura I.1 do Anexo I apresenta-se um diagrama do modelo pedagógico.

Os dossiers que continham a programação relativa a cada tema eram entregues em encontros de trabalho e reflexão aos professores que os aplicavam nas suas salas de aula (Grupo II).

Esses encontros possibilitavam o acompanhamento do processo de investigação-acção, para além de contribuírem para a sua avaliação. Mas o núcleo central de dados, a partir do qual se procedeu a essa avaliação, foi obtido através de testes que as crianças realizavam periodicamente e que nos permitiam verificar a forma como a aprendizagem se ia processando.

Esses dados vieram dar igualmente a possibilidade de testar a hipótese relativa à formação de conceitos - o outro objectivo de investigação que o Projecto pretendia atingir. Essa hipótese foi formulada nos seguintes termos:
Hipótese A - Existe uma correlação positiva entre o nível de desenvolvimento do sujeito para elaborar conceitos por tratamento da informação e o seu nível de desenvolvimento no domínio das linguagens verbal e visual e no âmbito das operações lógico-matemáticas e infralógicas.

Na Figura 1.1 apresenta-se um diagrama do plano experimental do Projecto.

A avaliação do processo de investigação-acção foi efectuada a partir dos dados recolhidos, por meio de um estudo qualitativo. Incidiu essencialmente sobre o sucesso do modelo pedagógico. Concluiu-se que

DIAGRAMA DO PLANO EXPERIMENTAL DO PROJECTO

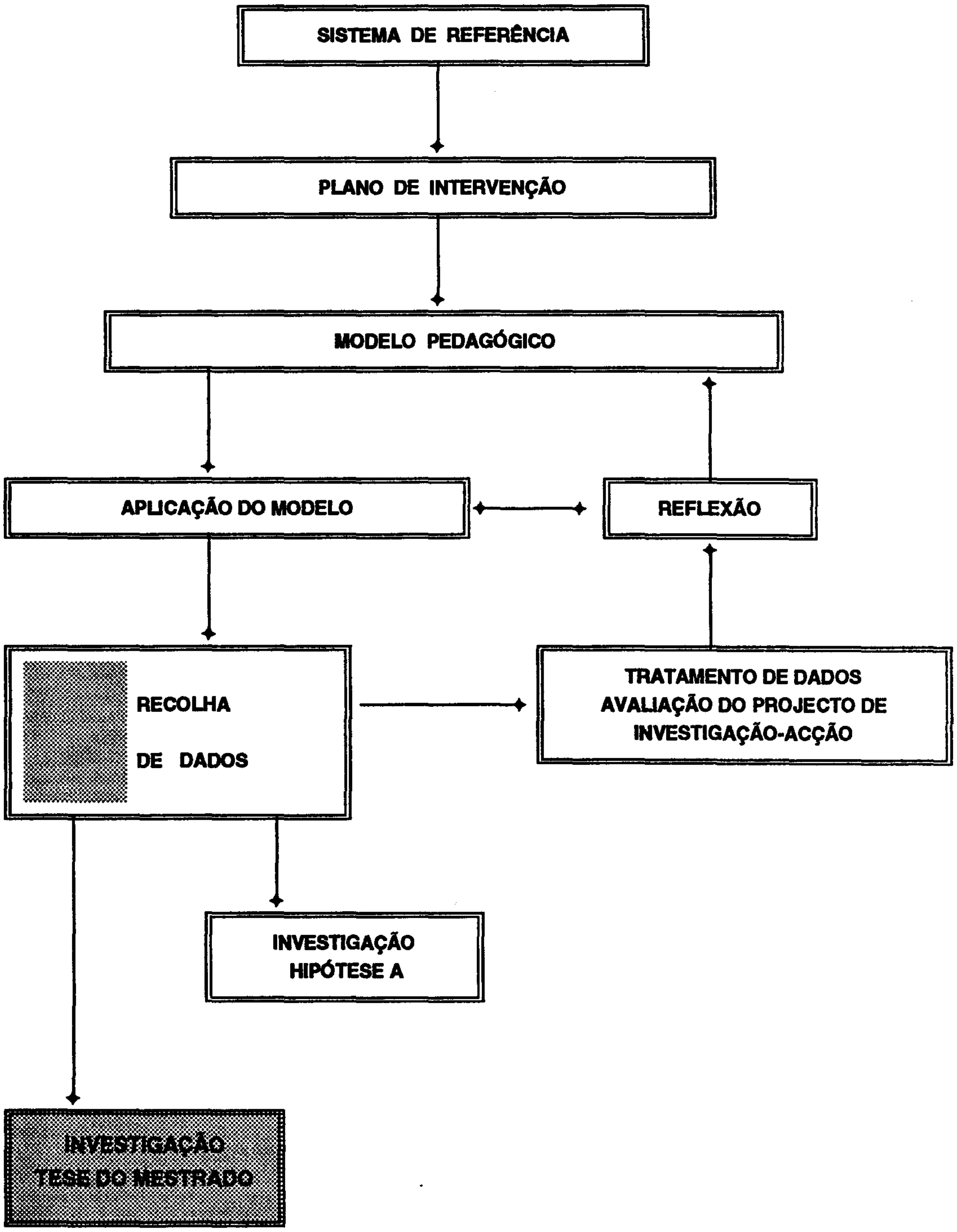


Figura 1.1 - Diagrama do Plano Experimental do Projecto

o modelo criado havia sido bastante eficaz não só do ponto de vista geral[4], mas ainda no que respeita especificamente à Matemática[5]. Esta conclusão não é, no entanto, generalizável, pelas limitações associadas a este tipo de investigação. O modelo mostrou-se eficaz, quando aplicado pelos professores do Grupo II do Projecto, àqueles alunos, naquele contexto e momento históricos. Podemos, quando muito, esperar que se obtenha um êxito semelhante quando aplicado em situações idênticas[6].

Por outro lado, para averiguar da validade da Hipótese A, foram calculados coeficientes de correlação de Spearman. Concluiu-se existir, de facto, uma correlação positiva entre o nível de desenvolvimento do sujeito para elaborar conceitos e o seu nível de desenvolvimento no domínio das linguagens verbal e visual das operações lógicas e infralógicas[7].

1.2 PROBLEMÁTICA DO TEMA EM ESTUDO

O modelo de ensino e aprendizagem da Matemática, construído no âmbito do Projecto «Ensinar é Investigar», valorizava a construção do conhecimento pela própria criança e procurava criar condições estimulantes e criativas que favorecessem essa via de aprendizagem. Nesta perspectiva, a resolução de problemas assume especial relevância. Assim, logo após a sua entrada no Ensino Primário, as crianças foram colocadas perante o desafio que um problema, por mais simples que seja, sempre implica. Os professores envolvidos na prática

[4] No final dos dois primeiros anos a percentagem de êxito foi de 85,7% enquanto que , a nível nacional em 1983/84 (I.N.E.), a taxa correspondente se situava em 65,5%. Relatório de Actividades do Projecto «Ensinar é Investigar», 1985.

[5] A curva de distribuição das classificações dos testes de Matemática apresenta invariavelmente uma forma em J, conforme se pode verificar nas Figuras I.1 e I.2 do Anexo I

[6] Do êxito de uma nova utilização do referido modelo pedagógico por outros professores nos fala ALMEIDA, 1990: "Nas provas de desempenho escolar, as diferenças entre os dois grupos de alunos (um dos quais sujeito ao modelo e outro não sujeito ao modelo) mostraram-se óbvias (com clara vantagem para os primeiros)", p. 34.

[7] Ensinar é Investigar, 1984, 1985, 1986, Relatórios de Actividades.

pedagógica evitaram ensinar formas de resolução. Criou-se, assim, um espaço de liberdade, no qual cada pequeno aluno tentava encontrar os seus próprios processos, recorrendo a estratégias diversas, de acordo com o seu nível de desenvolvimento e as suas características cognitivas pessoais.

Os processos informais que estas crianças construíram revelaram-se, de início, bastante hesitantes. No Anexo IV podemos encontrar alguns exemplos. No entanto, à medida que o ensino e consequente aprendizagem iam avançando, esses processos foram ganhando coerência, emergindo em formas cada vez mais consistentes e elaboradas. As crianças revelaram-se bons resolvedores de problemas e aprenderam a defender os caminhos seguidos em busca da solução.

Com o presente trabalho de investigação procurámos analisar esses *processos construídos pelas crianças para a resolução dos problemas*, na esperança de encontrar resposta para as seguintes questões:

Questão 1 Os processos informais criados pelas crianças para resolverem problemas evidenciam a utilização regular de algumas estratégias?

Questão 2 As diferentes estratégias regularmente utilizadas pelas crianças estão relacionados com

- o nível de factor geral de inteligência fornecido pelas matrizes de Raven
- o nível de competência matemática ?

Questão 3 Os iniciais processos informais das crianças evoluem transformando-se em outros mais abstractos e formais?

Definição dos conceitos operacionais

Problema - "é uma situação na qual o indivíduo ou grupo é chamado a realizar uma tarefa para a qual não existe um algoritmo

imediatamente acessível que determine completamente o método para descobrir a solução" (LESTER, 1978, p. 54).
Um problema difere de um **exercício** no facto de que aquele que o resolve não possuir um algoritmo que, quando aplicado, conduz certamente à solução (KANTOWSKI, 1974, p. 1).

Resolução de problemas - "é o processo de

a) compreender um problema,
b) seleccionar ou coligir os dados necessários para encontrar a solução,
c) escolher e implementar uma ou mais estratégias de resolução,
d) responder à(s) questão(ões) colocada(s) pelo problema, e
e) avaliar se a resposta é razoável" (CHARLES, citado por FERNANDES, 1988, p. 7).

Estratégias de resolução de problemas - actividades realizadas para encontrar e prosseguir caminhos de pesquisa através de um espaço problema, isto é, através de um "espaço que representa não só a situação inicial (o problema), mas também o objectivo, os estádios intermédios e quaisquer conceitos que aquele que resolve o problema usa para descrever para si mesmo a situação-estímulo" (KANTOWSKI, 1974, p. 5).

Processo de resolução de problemas - o conjunto de comportamentos ou actividades que integram a busca da solução (KANTOWSKI, 1974, p. 2). Um mesmo processo pode integrar uma ou várias estratégias.

Produto - solução verdadeira; os dois, processo e produto, são componentes essenciais da experiência de resolver problemas (KANTOWSKI, 1974, p. 2).

Processos informais das crianças - processos criados pelas próprias crianças com vista a encontrarem a solução de problemas, sem o recurso às operações e relações matemáticas mais abstractas e expressando-se através de linguagens não matemáticas ou através de formas primitivas da linguagem matemática.

Processos formais - os que recorrem a operações e processos matemáticos elaborados e se expressam na linguagem própria desta ciência.

Nível de factor geral de inteligência - nível de "factor g" obtido através das Matrizes Coloridas de Raven.

Nível de competência matemática - capacidade de fazer Matemática, obtida através da classificação nos testes de avaliação da aprendizagem nesta área do conhecimento.

CONCLUSÃO

O "corpus" da presente investigação é constituído por uma parte dos dados que foram recolhidos no âmbito do Projecto «Ensinar é Investigar».

Neste capítulo descreve-se este Projecto como uma experiência de investigação-acção que procurou transformar uma perspectiva pedagógica centrada no processo de ensino para uma outra centrada na aprendizagem.

Para além disso apontou-se como objectivo da investigação o estudo dos processos construídos pelas crianças para a resolução de problemas. Consideraram-se como questões de investigação: i) detectar a possível utilização regular de algumas estratégias; ii) averiguar da relação dessas estratégias com o factor geral de inteligência, entendido como nível de realização das matrizes de Raven, e com o nível de competência matemática; iii) analisar a forma como os processos de resolução de problemas evoluem ao longo dos quatro anos do Ensino Primário.

CAPÍTULO 2

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Resolver problemas é uma função essencial de todo o organismo vivo. "Viver é resolver problemas" (POPPER, 1989, p. 28). Na realidade vivemos resolvendo os problemas que a nossa existência constantemente nos coloca. Eles constituem os desafios que dão interesse à nossa vida.

Tal como na vida, também na Matemática, resolver problemas constitui uma actividade fundamental. Esse facto é amplamente atestado por toda a investigação que se tem realizado sobre este assunto e as muitas recomendações que se têm vindo a fazer no sentido de lhe conferir um papel relevante na educação matemática.

Neste capítulo procura dar-se notícia de alguns trabalhos de investigação que se efectuaram neste domínio. Na impossibilidade de os citar a todos, dada a vastidão da tarefa, referir-se-ão apenas aqueles que mais directamente se relacionam com o presente estudo. Alguns desses trabalhos foram selecionados por se debruçarem sobre diversos aspectos da resolução de problemas nos primeiros anos de escolaridade, outros por procurarem aprofundar, sobre diferentes ângulos, os processos envolvidos na resolução de problemas. Far-se-á ainda referência a alguns relatórios e documentos que, a nível nacional e internacional, têm produzido recomendações no domínio da educação matemática.

2.1 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR CRIANÇAS DO ENSINO PRIMÁRIO

BANA e NELSON (1978) verificaram que a informação irrelevante afecta a eficácia na resolução de problemas de crianças dos três primeiros anos de escolaridade, levando-as a praticar erros. Esta dificuldade tenderia a esbater-se com a idade. LESTER (1978) defendeu, num estudo realizado no âmbito do Mathematical Problem--Solving Project (MPSP), que o grau de complexidade para focar o processo de resolução de um problema é determinado em parte pelo números de parcelas de dados irrelevantes.

Num outro estudo, o mesmo autor (LESTER, 1975), observando as transformações operadas no desenvolvimento da resolução de problemas em alunos do 1º ao 12º ano concluiu que: i) as crianças dos três primeiros anos de escolaridade utilizam muitas vezes uma resposta que prevêem com sucesso, indiferentes ao facto de essa resposta ser ou não apropriada; ii) o tempo utilizado, o número de erros feitos, a tendência das crianças mais novas para optarem exclusivamente por estratégias de tentativa e erro constituem as diferenças mais significativas entre crianças mais novas e mais velhas; iii) esta característica está inversamente relacionada com a idade, mostrando-se os alunos mais novos menos capazes de aprender com os erros cometidos. A conclusão iii) mostra-se coerente com a conjectura feita pelo MPSP, segundo a qual crianças do 5º ano de escolaridade sem treino usam apenas uma estratégias de tentativa e erro na resolução de problemas. (STENGEL, LEBLANC, JACOBSON e LESTER, 1977, p. 46).

Quanto aos dois factores habitualmente considerados como determinantes na capacidade de resolução de problemas das crianças mais novas, a leitura e o cálculo, as opiniões divergem. LINVILLE (1970) defendeu, com base no seu estudo, que o nível de dificuldade na sintaxe tinha um efeito significativo na capacidade de resolução de problemas. CHASE (1960) e MARTIN (1964) tinham igualmente concluído que a facilidade de leitura estava associada à referida capacidade. No entanto KNIFON e HOLTAN (1976) argumentam que é difícil atribuir uma importância significativa à leitura como fonte de fracasso, concluindo que são os erros de cálculo os mais determinantes de sucesso. Da mesma forma DODSON (1972) e JERMAN (1974) encontraram que a destreza de cálculo é determinante por parte das crianças mais novas, o que já não acontece com as mais velhas.

Investigações efectuadas sobre o modo de formulação dos problemas e o contexto em que eles são apresentados às crianças parecem revelar que estes factores exercem influência no êxito com que são resolvidos. Dois investigadores, FAYOL e ABDI (1986) efectuaram em França um estudo sobre o impacto da formulação dos enunciados sobre a resolução de problemas de adição em 192 crianças de diversos anos do ensino primário. Os resultados da investigação permitem-lhes concluir que, para as crianças de 6 a 8 anos, os processos utilizados são muito dependentes das respectivas formulações.

Foi igualmente em 1986 e em França que dois outros investigadores, BRISSIAUD e ESCARABAJAL, compararam os processos utilizados por alunos do quinto ano do ensino primário aquando da resolução de problemas, consoante o enunciado de um problema se apresenta sob uma forma clássica ou sob uma forma enriquecida em elementos contextuais[8]. Um dos problemas utilizados era do tipo receita-despesa, muito familiar aos alunos. Neste caso as diferenças, quanto às taxas de insucesso e ao tipo de processos empregues, não se mostraram significativas. Pelo contrário, na resolução de outros dois problemas, não familiares, os alunos obtiveram um maior sucesso com enunciados de tipo clássico do que com enunciados contextualmente enriquecidos, manifestando com estes últimos uma forma mais elementar de relacionar os dados.

Por sua vez, dois investigadores escandinavos SALJO e WYNDHAMN (1988), com o objectivo de clarificar os factores contextuais que determinam as actividades cognitivas, verificaram, através de um estudo, que a "performance" de um grupo de alunos do ensino primário sobre uma tarefa matemática é diferenciada pelo contexto ambiental no qual o problema é apresentado. As diferenças

[8] Enunciados enriquecidos em elementos contextuais (énoncé-récit) são formas de apresentar um problema integrando-o numa pequena história, que é relatada com algum pormenor.

entre os grupos examinados parecem ser devidas mais às capacidades de análise e descodificação das tarefas do que às capacidades de manipulação dos algoritmos.

Analisando a estrutura dos erros de interpretação em Matemática, em Ciências e em programação, PERKINS e SIMMONS (1988) detectaram as suas analogias estruturais, interpretando-os a quatro diferentes níveis: o da resolução de problemas, o do conteúdo, o epistemológico e o da avaliação. Concluíram que os erros mais frequentes estão ligados aos conteúdos. Examinaram as insuficiências pedagógicas correspondentes e propuseram algumas intervenções.

FERRARI (1991) relata um estudo realizado em Génova sobre a utilização do raciocínio hipotético na resolução de problemas no ensino primário. O estudo permite-lhe concluir que: i) formas de progressiva esquematização na transformação de estratégias informais das crianças em processos mais eficazes são muito úteis não só no domínio da aquisição de algoritmos mas também na construção de habilidades fundamentais de criação e gestão de processos e raciocínios e na programação; ii) actividades que induzam os alunos a reflectirem sobre as suas próprias acções e pensamentos ajudam-nos a dominar os seus processos e raciocínios e a olhá-los como produtos autónomos; iii) a habilidade de produzir espontaneamente processos e raciocínios parece depender mais do domínio de significados específicos do problema do que da sua complexidade; iv) os processos e raciocínios das crianças estão fortemente relacionados com o tempo, sendo habitualmente representados com uma dimensão temporal relevante.

2.2 O ESTUDO DOS PROCESSOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Quanto ao estudo dos processos de resolução de problemas verifica-se que estes têm sido considerados como muito mais importantes do que a simples constatação dos resultados obtidos. A este tipo de questão encontra-se normalmente ligada uma outra igualmente pertinente: averiguar a eficácia de determinados modelos de ensino.

Neste domínio têm sido feitas notáveis investigações, como as de KILPATRICK (1968) e KANTOWSKI (1974) , entre outras. Referir-me-ei especialmente a estes dois estudos pela importância de que se revestiram e a influência que tiveram em trabalhos subsequentes.

Usando a técnica de "pensar em voz alta", o que lhes permitiu um estudo muito mais eficaz e pormenorizado dos processos utilizados na resolução de problemas, eles introduziram um estilo que foi posteriormente adoptado por muitos outros investigadores (GOLDBERG, 1974; LUCAS, 1974; WEBB, 1975; PUTT, 1978, entre outros).

KILPATRICK (1968) entrevistou 56 estudantes do ensino superior a quem solicitou que pensassem em voz alta enquanto resolviam problemas, produzindo assim protocolos gravados. Estes protocolos foram codificados através de um código de estratégias heurísticas relacionadas com as 4 fases do processo de resolução de problemas da obra de PÓLYA (1945) "How to solve it". As principais estratégias codificadas eram: desenhar uma figura, usar aproximações sucessivas, questionar a existência e unicidade da solução, usar raciocínio dedutivo, usar uma equação, usar tentativa e erro e testar a solução. KILPATRICK chegou às seguintes conclusões: i) o uso de equações por parte dos estudantes está positivamente correlacionado com a sua capacidade quantitativa[9], a sua execução matemática, a fluência verbal, o raciocínio geral, o raciocínio lógico e o seu ritmo de reflexão conceptual; ii) embora a dedução fosse uma estratégia muitas vezes usada, ela levava usualmente a uma solução errada; iii) em contraste com esta constatação, a estratégias de ensaio e erro conduzia habitualmente à solução correcta; iv) os estudantes que utilizavam simultaneamente uma estratégia de ensaio e erro e o raciocínio dedutivo, frequentemente atingiam melhores níveis de "performance" do que outros nas capacidades quantitativa e de execução (KILPATRICK citado por FERNANDES, 1988); v) os estudantes com maior capacidade quantitativa e de execução matemática usam mais

[9] Capacidade de cálculo numérico.

frequentemente a estratégia de ensaio e erro do que os outros (KILPATRICK citado por LESTER, 1980b).

Eleanore Louise KANTOWSKI (1974) utilizou uma metodologia de investigação designada por "teaching experiment". Este método envolve uma intervenção a nível da prática de ensino na sala de aula acompanhada pela recolha sistemática de dados qualitativos através da observação minuciosa dos comportamentos dos sujeitos (observação clínica). As observações são geralmente realizadas directamente durante entrevistas individuais em que o aluno pensa em voz alta e/ou pela análise de protocolos escritos.

KANTOWSKI trabalhou com um pequeno grupo de oito alunos do nono ano de escolaridade, de capacidades comparáveis, quatro raparigas e quatro rapazes. O estudo desenvolveu-se em quatro fases: fase I - administração de um pré-teste; fase II - intervenção no processo de ensino com a finalidade de familiarizar os alunos com o uso de estratégias heurísticas; fase III - ensino da geometria usando o método heurístico; fase IV - administração de um pós-teste contendo problemas de geometria e problemas não relacionados com essa matéria e administração de um teste sobre os pré-requisitos em conhecimentos necessários à resolução dos problemas do pós-teste.

As principais conclusões a que KANTOWSKI chegou foram: i) os alunos classificados acima da mediana evidenciavam padrões regulares de processos de análise e síntese; ii) as iniciais abordagens informais dos problemas de geometria evoluíram para outras mais formais e abstractas; iii) os alunos que melhor resolviam problemas utilizavam frequentemente estratégias heurísticas.

Mais recentemente duas investigadoras brasileiras, SCHLIEMANN e ACIOLY (1989) realizaram uma investigação com vendedores de apostas de um jogo de lotaria do Recife (Brasil), cujos resultados se revelam igualmente de interesse para o presente estudo uma vez que se debruçam sobre processos de resolução de problemas. Os vendedores tinham necessidade de resolver constantemente questões relacionados com a sua actividade profissional e que envolviam números representando agrupamentos privilegiados, tais como o doze e o vinte e quatro. Os dados recolhidos permitiram detectar técnicas de resolução de problemas bastante eficazes mas muito diferentes das utilizadas na escola. Assim i) mesmo não sabendo dividir segundo esquemas formais e escolares haviam desenvolvido estratégias de resolução de problemas de divisão por recurso à adição e multiplicação, ii) a sequência de passos utilizados variava grandemente de sujeito para sujeito, iii) a experiência diária estimulara a percepção de relações entre números e o aparecimento de grupos privilegiados que muito ajudavam a encontrar soluções para problemas aritméticos sem necessidade de recurso a sequências fixas de passos.

2.3 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA MATEMÁTICA ESCOLAR

O nascimento de uma nova sociedade, a "sociedade informática"[10], tem vindo a induzir, nos últimos anos, uma viragem nas grandes finalidades da educação matemática. "O mundo encontra-se hoje nos alvores de uma nova revolução tecnológica que está a ter na sociedade um impacto pelo menos tão grande como a revolução industrial" (ICMI, 1986, p.11). Assim, assuntos como a resolução de problemas, o cálculo mental e a estimativa, a estatística, a utilização das novas tecnologias como as calculadoras e o computador, estão a revestir-se de uma importância até agora ignorada. As recomendações de vários organismos internacionais ou estrangeiros e os novos programas portugueses reflectem as actuais preocupações.

O encontro de especialistas do ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) realizado no Kuwait em 1986 com a finalidade de traçar os grandes objectivos para a educação matemática

[10] Expressão utilizada pelo NCTM, 1991, para designar a actual sociedade ocidental dominada pelas novas tecnologias de informação, in Normas para o currículo e avaliação em Matemática, p. 3.

nos anos 90, produziu uma série de recomendações das quais destacamos: "existe um amplo acordo entre os educadores matemáticos segundo o qual é desejável uma maior ênfase nos **processos matemáticos** em todos os níveis educativos" (ICMI, 1986, p. 38) e as mudanças nos currículos devem reflectir-se essencialmente em objectivos melhor definidos e nos **modos de aprendizagem dos alunos** e não na introdução de novos conteúdos (ICMI, 1986, p. 69).

Em 1980, um outro organismo, The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) dos E.U.A. advogava, na sua *Agenda para acção* (1985), que a resolução de problemas deve ser o foco da Matemática escolar, especificando que "a definição e a linguagem de resolução de problemas devem ser desenvolvidas e expandidas de modo a incluírem uma vasta gama de estratégias, processos e modos de apresentação que incluam todo o potencial das aplicações da Matemática" (p. 7), que "os professores de Matemática devem criar ambiente na sala de aula no qual possa florescer a resolução de problemas" (p. 7) e ainda que "os investigadores e instituições financiadoras devem dar prioridade às investigações sobre a natureza da resolução de problemas e a formas eficazes de formar solucionadores de problemas" (p. 9).

Data de 1982 o relatório Mathematics Counts elaborado pela comissão designada por Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools, criada por iniciativa do Ministério de Educação inglês. Foi presidido por W. H. COCKCROFT. Nele se dá grande importância à resolução dos problemas, nomeadamente a problemas da vida real, e a actividades de investigação[11]. É considerado como especialmente inovador pela importância que confere às interacções de alunos entre si e com o professor (PONTE, 1990).

Em 1987, o NCTM volta de novo a publicar um importante documento: Normas para o currículo e a avaliação em Matemática[12]. Nele se defende a preocupação de transformar cada aluno num

[11] Actividades de investigação são, no ensino inglês, propostas de trabalho constituídas por uma situação matemática a propósito da qual se levantam algumas questões para as quais o aluno deve encontrar respostas.

solucionador de problemas como a primeira de cinco normas programáticas gerais e recomenda que, nos quatro primeiros anos de escolaridade "A resolução de problemas deve ser o foco central do currículo de Matemática. Como tal, é um objectivo prioritário do ensino da Matemática e uma parte integral de toda a actividade matemática. A resolução de problemas não é um tópico distinto, mas um processo que atravessa todo o programa e fornece o contexto em que os conceitos devem ser aprendidos e as competências desenvolvidas" (NCTM, 1991, p. 29). Considera que o ensino tradicional americano dá ênfase à prática da manipulação de expressões e ao treino de algoritmos a anteceder a resolução de problemas, ignorando que o conhecimento muitas vezes emerge exactamente de situações problemáticas (NCTM, 1991, p. 11).

Datam de 1989 dois outros relatórios com recomendações para a educação matemática. Um deles procede do National Research Council e tem por título "Everybody Counts" (1989). Reflecte a preocupação de que todos, mesmo os habitualmente considerados como menos dotados para a Matemática, recebam um nível de conhecimentos considerados indispensáveis ao seu papel de cidadãos, num mundo onde esta ciência ocupa um lugar cada vez mais importante. Realça o facto de que quanto mais elevado for o nível de responsabilidade de um emprego mais conhecimentos matemáticos exige, do que resulta que a Matemática se transformou numa chave para ter êxito (p. 4).

O outro relatório chama a atenção para a importância da educação científica e tecnológica, a chamada "scientific literacy"[13]: o Project 2061 da American Association for the Advancement of Science (1989). É composto por sete volumes, um dos quais dedicado à educação matemática (BLACKWELL e HENKIN, 1989), no qual se discutem quais as ideias fundamentais que, no domínio desta ciência, todos devem compreender e conhecer. Os seus autores, David BLACKWELL e Leon HENKIN consideram que "a actividade

[12] Do original "Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics". Perante a dificuldade de encontrar uma palavra portuguesa equivalente à inglesa "standard", o tradutor português optou pelo termo "norma".

[13] A expressão "scientific literacy" não tem equivalente na língua portuguesa. Refere-se aos conhecimentos e capacidades mínimas que os alunos devem adquirir em ciências

matemática consiste num ciclo interactuante de processos básicos" e que "a criação do ciclo de processos ocorre quando se formulam problemas". E acrescenta que "de facto, a formulação de problemas é uma parte importante da Matemática na qual os próprios alunos devem ganhar experiência" (p. 41).

A Associação de Professores de Matemática portuguesa preocupou-se igualmente com as grandes orientações que deveriam presidir à reforma curricular em curso, na sua publicação de 1988 "Renovação do Currículo de Matemática". Desta obra citamos do Princípio nº 18 (p. 32) "*Daqui o sentido em assumir a Resolução de Problemas como uma linha de força que, «atravessando» todo o currículo, oriente a definição dos seus objectivos, a proposta de metodologias, a selecção dos conteúdos e processos de avaliação. Isto não significa o abandono das «regras e das técnicas» mas o deslocar da ênfase para uma via educativa, de ensino e aprendizagem da Matemática, que parece corresponder melhor às necessidades do desenvolvimento da criança e do jovem, à natureza e exigências internas e externas da Matemática, às solicitações sociais.*"

Enquadram-se nesta linha os programas actualmente em fase de lançamento, na medida em que consideram os problemas como actividade fundamental a partir da qual todos os conteúdos devem desenvolver-se. Assim, a introdução ao programa do 1º Ciclo do Ensino Básico refere que este se encontra "organizado em três capítulos que deverão ser desenvolvidos a partir de uma actividade considerada fundamental - os problemas" (Ministério da Educação, 1990). Os programas do 2º e 3º ciclos consideram que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas é um eixo organizador do ensino da Matemática.

Pensamos que a investigação deve apoiar todo este esforço para transformar a resolução de problemas num dos principais objectivos do ensino da Matemática e num dos mais poderosos meios de aprendizagem.

---

através da escolaridade obrigatória. Poderia talvez ser traduzido por "cientificamente alfabetizado" por extensão semântica do termo "literate" (alfabetizado).

CONCLUSÃO

A resolução de problemas tem vindo a merecer a maior atenção por parte de investigadores, estudiosos e responsáveis em educação matemática nos últimos anos. Sobre este tema tem surgido grande quantidade de investigação, inúmeros livros, comunicações em congressos e artigos de revistas científicas. De igual forma a resolução de problemas tem aparecido em relatórios de diversos grupos de trabalho e nos currículos e programas oficiais como uma questão central.

Dentro deste assunto, a ênfase tem vindo a deslocar-se progressivamente da atenção dada aos produtos para um interesse mais profundo sobre os processos[14]. De igual forma, no binómio ensino/aprendizagem o foco tem vindo a desviar-se do primeiro para o segundo, procurando adequar formas de ensino inovadoras às descobertas realizadas sobre os processos segundo os quais o conhecimento é adquirido.

[14] Conforme Capítulo 1 - Definição dos conceitos operacionais.

CAPÍTULO 3

FUNDAMENTAÇÃO DA PERTINÊNCIA E INTERESSE DO ESTUDO

Poucas vezes o ensino tem conferido o devido valor às produções espontâneas dos pequenos alunos. A sua estrutura de pensamento, diferente da do adulto (PIAGET, 1976), provoca neste uma natural desconfiança.

A propósito de um debate havido no ICME 6, último congresso da International Commission on Mathematical Instruction, podemos dar-nos conta das dificuldades que se levantam a formas de ensino que consideram importantes as estratégias espontâneas e informais das crianças na construção do seu próprio conhecimento matemático. Podemos também reflectir, com os congressistas, do interesse de promover essas formas de ensino.

No referido congresso, realizado em Agosto de 1988 em Budapeste, as estratégias "naive"[15] das crianças foram largamente debatidas pelo grupo de acção A2 (ICMI, 1988). Kath HART (Reino Unido) forneceu informações sobre os projectos de investigação "Concepts in Secondary Mathematics" e "Strategies and Errors in Secondary Mathematics" no âmbito dos quais se estudaram aspectos da aprendizagem de razões e proporções. Os estudos realizados por HART mostraram a persistência de processos "naive" por um longo período de tempo, incluindo estratégias aditivas imperfeitas, o que poderá pôr em causa os objectivos a atingir pelo ensino da Matemática

[15] Não é facil encontrar uma só palavra portuguesa que traduza de forma adequada o termo "naive". Ao longo da tese utilizam-se diferentes palavras tais como "natural", "informal", "ingénua".

- conhecimentos e processos formais de resolução de problemas (ICMI, 1988, p. 121-122).

Algumas questões iniciais foram levantadas pelos organizadores do grupo de acção A2 e seguidamente debatidas pelo grupo:

- Que abordagens de ensino são compatíveis com o desenvolvimento próprio das crianças?
- As estratégias e processos informais das crianças podem ser transformadas em estratégias institucionalizadas e conhecimento matemático ou, por outras palavras, será possível adaptar um ensino de "longo prazo" às estratégias das crianças?
- Que características possuem as estratégias das crianças?

Tendo o debate atingido um impasse, novas questões foram levantadas mas não chegaram a ser discutidas em profundidade e acabaram por tomar um carácter de observações finais. Foram elas:

- A maioria dos actuais métodos do ensino não são compatíveis com o desenvolvimento das estratégias naturais das crianças[16].
- Os professores precisam de ter confiança nas suas próprias capacidades de ensino em ordem a serem capazes de confiar na eficácia e qualidade das estratégias espontâneas das crianças.
- Os objectivos para a educação matemática primária podem ser atingidos por "reconstrução" das estratégias próprias das crianças em outras mais institucionalizadas, quando enquadradas por um processo de ensino/aprendizagem.

---

[16] Diz respeito de uma forma especial à visão que se tem da Matemática-actividade humana versus corpo adquirido de conhecimento dedutivo estruturado. Ver as diversas posições sobre a natureza da Matemática em 4.4, Capítulo 4 da tese.

Finalmente foram feitas pelo grupo recomendações para trabalhos futuros. Assim, dever-se-á promover a investigação no sentido de tornar possível uma aprendizagem construtivista que represente um compromisso com as estratégias próprias das crianças numa perspectiva de longo prazo...tal investigação deve procurar desenvolver cursos protótipo...e criar a teoria para este tipo de ensino e aprendizagem...isto requer uma educação matemática assente no real, como base de um processo de ensino/aprendizagem em que as construções e produções das crianças são a espinha dorsal...(ICMI, 1988, p. 123-124).

O modelo de ensino/aprendizagem da Matemática do processo experimental que esteve na base da presente investigação parece responder a muitas das inquietações expressas no ICME, na medida em que:

- não ensina directamente formas de resolução de problemas, antes estimula a criação e construção pela própria criança de estratégias espontâneas, e é com base nessas estratégias que a aprendizagem da Matemática se vai desenvolvendo;
- essas estratégias naturais evoluíram, como este estudo irá mostrar, para outras mais elaboradas e expressas em formas mais institucionalizadas, tendo as crianças, no espaço de quatro anos, pelo menos, igualado e em muitos casos mesmo ultrapassado as que são sujeitas a um processo de ensino mais tradicional;
- os professores que aplicaram o modelo nas suas classes aprenderam a confiar nas estratégias espontâneas das crianças, apercebendo-se que elas lhes conferem uma maior segurança de raciocínio, lhes desenvolvem a sua criatividade e a aptidão e gosto pela Matemática.

CONCLUSÃO

Do que fica dito parece poder concluir-se que o trabalho com as estratégias ingénuas (naive) das crianças na resolução de problemas é uma área com interesse e ainda pouco explorada na educação matemática.

O modelo pedagógico experimentado poderá talvez abrir caminhos para, através de uma pedagogia inovadora que integre de forma essencial as estratégias informais das crianças, lançar novas perspectivas no ensino actual da Matemática.

PARTE II

MODELO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA UTILIZADO NA EXPERIÊNCIA

CAPÍTULO 4

CARACTERIZAÇÃO DO MODELO

As crianças, cujos trabalhos de resolução de problemas se analisam neste estudo, foram sujeitas a um processo de ensino/aprendizagem da Matemática que seguiu um modelo por nós elaborado, conforme o já referido na Introdução. A leitura desses trabalhos deve assim ser feita, tendo em conta o referido modelo de ensino. Deste modo importa caracterizá-lo antes de nos referirmos à análise a que foram sujeitos os trabalhos e às conclusões que delas retirámos.

Com esse objectivo iremos expressar neste capítulo os princípios que lhes serviram de base (em letra mais forte).

No sentido de clarificar os fundamentos teóricos do modelo, iremos referir, para cada princípio, o(s) autor(es) que no domínio da Epistemologia, da Filosofia da Matemática, da Psicologia e da Pedagogia/Didática influenciaram, de alguma forma, a sua concepção ou podem ajudar a interpretá-lo.

4.1 QUANTO À FORMAÇÃO DO CONHECIMENTO: FUNDAMENTOS EPISTEMOLÓGICOS DO MODELO

Procurou-se que o conhecimento seja construído pela própria criança como sujeito cognoscente em vez de adquirido por transmissão directa professor-aluno.

Na construção do conhecimento dá-se maior valor aos processos do que aos produtos.

Considerou-se a resolução de problemas o veículo de construção do conhecimento por excelência, uma vez que permite à criança reflectir, matematizar, experimentar, conjecturar, aprender procedimentos, provar, generalizar, comunicar e discutir.

As situações problemáticas são muitas vezes situações sobre as quais os alunos podem agir, realizando transformações, contando, estabelecendo equivalências, medindo, etc., porque as acções físicas sobre as situações são especialmente importantes nesta etapa do desenvolvimento.

Todos estes pressupostos encontram o seu fundamento no pensamento de PIAGET e nas teorias construtivistas que dele nasceram.

PIAGET estuda o acto de conhecer, a relação cognitiva estabelecida entre sujeito e objecto, enquadrando-o na evolução intelectual ontogénica. Caracteriza as estruturas intelectuais que sucessivamente se vão formando no indivíduo. Considera a génese das estruturas como uma hierarquização ou filiação naturais e não apenas como o processo temporal pelo qual o indivíduo as descobre como realidades pré-existentes. Defende esta posição com base a) na refutação de que as estruturas existam no mundo ideal no sentido platónico, nos objectos da realidade física ou no próprio sujeito, e b) nas teses construtivistas segundo as quais entre duas estruturas de níveis diferentes não existe redução de qualquer uma delas à outra, antes se assimilam mutuamente na medida em que a mais complexa é gerada pela de nível inferior mas esta, por sua vez, integra-se na primeira enriquecendo-a (PIAGET, 1986, p. 105).

Assim, cada ser humano, através da *acção*, constrói *esquemas* de interpretação e actuação sobre o real. Tais esquemas vão evoluindo e dando origem a novos esquemas mediante mecanismos de *assimilação e acomodação*, que lhe permitem saltar de um determinado *patamar de equilíbrio* para um outro, mais perfeito e complexo, numa constante adaptação do organismo ao seu ambiente que PIAGET designa por *equilibração*.

Por *assimilação* considera o autor o processo mental segundo o qual "toda a ligação nova se integra num esquematismo ou estrutura anterior" (PIAGET e INHELDER, 1979, pág. 13). Um sujeito só é sensível a um estímulo se este é assimilável às estruturas que ele já possui, que serão por sua vez modificadas e enriquecidas em função de novas assimilações.

A *acomodação* é, para o autor, a modificação de um determinado esquema no sentido de responder a uma nova situação.

Enquanto a assimilação possibilita a utilização de um esquema já existente, na resposta a uma nova situação, a acomodação modifica o próprio esquema, criando, a partir dele, um outro. A acomodação é, assim, um processo mais poderoso, mais versátil do que a assimilação, possibilitando uma maior capacidade de adaptação.

Em todo este processo a *acção* é considerada essencial, diremos mesmo que mais essencial ainda do que a linguagem. A actividade simbólica surge como interiorização da actividade exterior da criança. O conhecimento, nomeadamente o conhecimento matemático, é produzido pela actividade do indivíduo.

Uma outra questão que interessa reter é a diferença estabelecida por PIAGET entre "saber fazer" e "compreender" (1978). "Saber fazer" é um saber ligado a uma acção guiada por um esquema mental implícito. É uma forma de atingir na prática os fins propostos, de ter êxito (réussir). "Compreender" é uma forma de dominar mentalmente as situações, de encontrar esquemas conceptuais que permitam resolver os problemas nelas inscritos. É ser capaz, não só de raciocinar, mas de expressar os seus raciocínios. Implica um grau superior de consciência dos processos utilizados.

Até ao desenvolvimento das operações formais, o saber fazer antecede o compreender. A escola, pelo contrário, segue normalmente uma prática compatível com a ideia inversa[17].

No que se refere ao acesso ao conhecimento científico, PIAGET distingue entre duas diferentes formas de acesso: a abstracção simples

[17] Afirmação proferida por G. LERBET num seminário de Mestrado em 1990.

ou empírica e a abstracção reflexiva. Pela primeira o sujeito abstrai as propriedades observáveis dos objectos, o que lhe permite construir o conhecimento físico. Pela abstracção reflexiva cria e introduz relações entre os objectos ou seres, o que lhe permite construir o pensamento lógico-matemático. No que respeita à acção, na abstracção empírica a atenção do indivíduo é orientada para o que nela existe de específico, enquanto que na abstracção reflexiva se orienta para o que na acção existe de geral.

Apesar de distintas, as duas formas de abstracção encontram-se interligadas na medida em que não é possível haver abstracção simples sem abstracção reflexiva, isto é, não é possível construir o conhecimento físico sem um quadro lógico-matemático. Por outro lado as estruturas lógico-matemáticas começam a construir-se com o apoio das características observáveis dos objectos e só progressivamente se vão tornando autónomas em relação ao conteúdo físico.

"A visão construtivista (de PIAGET sobre) as competências e concepções matemáticas - o conhecimento é produzido pela actividade pessoal da criança - é hoje provavelmente uma das mais amplamente aceites entre os investigadores em psicologia da educação matemática" (VERGNAUD, 1990). De facto existem actualmente não uma mas diversas teorias construtivistas, as quais vão desde o construtivismo radical de von GLASSERSFELD (1984 e 1985) e STEFFE (1983) a diversos tipos de construtivismo social como os de BALACHEFF (VERGNAUD, 1990) e de ERNEST (1991).

Podemos ainda citar BRUNER a propósito da importância da resolução de problemas em toda a actividade humana. Veja-se o que a esse respeito se diz no ponto 4.3 deste capítulo.

As situações problemáticas, quando relacionadas com o "mundo" da criança, conferem sentido aos conhecimentos matemáticos (ROGERS, 1985). Por tal razão privilegiou-se a

resolução de problemas reais retirados do meio envolvente da criança.

As reflexões pedagógicas de Carl ROGERS tiveram grande influência sobre o modelo. Veja-se o que a esse respeito se refere no ponto 4.2 deste capítulo

O erro é considerado como uma contingência a que todo o ser humano está sujeito na sua actividade de construção do conhecimento. Como tal deve ser desdramatizado, mas socialmente reconhecido e ultrapassado.

Existem algumas formas de erro que estão relacionadas com o conceito elaborado por BACHELARD e por ele designado por "obstáculo epistemológico" (BACHELARD, 1984).

Não se trata de obstáculos externos à aquisição de conhecimento, como seja a complexidade de uma estrutura, a raridade de um fenómeno ou as dificuldades experimentais. São antes problemas levantados no espírito do próprio indivíduo relativamente ao acto de conhecer. São "evidências", pré-conceitos, apegos a determinadas teorias, inércias que oferecem resistências à constante evolução da ciência.

"Com efeito, nós conhecemos *contra* um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal feitos", incompletos ou inacabados. (BACHELARD, 1984, p. 165).

Há obstáculos epistemológicos que evitam o questionamento de conhecimentos que em determinado momento foram úteis mas que, com o tempo e a evolução científica, necessitam ser reformulados, ou mesmo renovados, dando origem a novos conhecimentos.

No acto pedagógico, não raras vezes obstáculos do mesmo tipo se levantam a uma correcta aprendizagem. Preconceitos estabelecidos pelo senso comum, informações incompletas e pouco aprofundadas, "evidências", são ruídos introduzidos no sistema cognitivo que se entrepõem a uma correcta aquisição de um conceito, de um princípio ou de uma teoria. BACHELARD denomina-os "*obstáculos pedagógicos*". É necessário que o indivíduo os consciencialize e ultrapasse de uma forma esclarecida, para que a aprendizagem se processe com exactidão.

4.2 QUANTO AO SUJEITO DA APRENDIZAGEM: FUNDAMENTOS PSICOLÓGICOS DO MODELO

O sujeito da aprendizagem é o centro de todo o processo. Procura-se conhecê-lo e aceitá-lo como pessoa, em todas as suas dimensões, afectiva, intelectual, social e cultural (ROGERS, 1985). Cuida-se muito especialmente do desenvolvimento da sua personalidade como um todo harmónico e equilibrado e que deve desabrochar em todas as suas potencialidades (ROGERS, 1985). Respeita-se o seu ritmo, os seus interesses, a sua forma própria de raciocinar, as estratégias e modelos por ele criadas. Defende-se a sua liberdade no respeito pelos outros e pelo grupo.

Cuida-se que todas as crianças acreditem nas suas capacidades, procurando o professor prestar uma cuidadosa atenção a cada aluno, à formação harmónica da sua personalidade e ao seu processo de aprendizagem.

ROGERS reflectiu sobre as questões da educação e dela nos ofereceu uma perspectiva profundamente humana.

Eis algumas das propostas deste autor sobre a pessoa e o processo educativo.

Cada homem é um ser único que é preciso respeitar em toda a sua globalidade. Ele é simultaneamente objecto e sujeito em educação e como tal o seu centro.

Cada pessoa procura desenvolver-se a partir do seu estado de organização. Sendo assim, o professor deve constituir-se apenas como um estímulo e um apoio, numa atitude de não directividade.

Uma aprendizagem significativa verifica-se mais facilmente quando as situações são captadas como problemáticas (ROGERS, 1985, p. 258). Os alunos, em contacto com os problemas da vida real, desejam aprender, desenvolver-se, crescer; procuram descobrir, criar e dominar. Esta crença constitui a base fundamental da confiança do professor nas possibilidades cognitivas e educativas dos alunos.

A autenticidade e coerência do professor facilita o processo de desenvolvimento dos alunos. Ele deve, portanto, aceitar os seus sentimentos, sem os impor aos seus educandos. Deve igualmente aceitar e procurar compreender cada aluno como ele é, admitindo a irredutibilidade de pessoas.

Em educação a utilização dos recursos disponíveis pode ser útil e estimulante. O próprio professor se deve constituir como recurso.

Considera-se que ele é capaz de ser o construtor do seu próprio conhecimento e que essa construção se efectua a partir da acção.

Recorde-se, a propósito, tudo o que no ponto 4.1 deste capítulo foi dito sobre a teoria de PIAGET e o construtivismo.

Aceitou-se que os alunos do 1º Ciclo do Ensino Básico, sujeitos da amostra do Projecto, se encontravam no período das operações concretas e que, portanto, o seu raciocínio era "a interpretação inteligente da acção executada" (PIAGET, 1949). Por tal razão se considerou fundamental na construção do conhecimento a acção das crianças sobre as situações.

A teoria de PIAGET, no domínio da Psicologia, ocupa um lugar central no que respeita ao desenvolvimento cognitivo dos indivíduos. Trata-se de uma visão estruturalista que integra vários períodos de desenvolvimento que se sucedem desde o nascimento até à idade adulta.

Cada um destes estádios é definido por uma "estrutura" de conjunto, constituída por esquemas e leis muito precisas, e que obedece a três características fundamentais: i) totalidade, no sentido de formar um todo coerente, permitindo identificar o que faz ou não parte dela; ii) transformação, que lhe é conferida pela dinâmica dos seus elementos; iii) auto-regulação, na busca de um estado de equilíbrio (LERBET, 1986).

O modelo piagetiano parte de uma matriz sensório-motora e, através de uma interiorização progressiva e em espiral, vai gerando os estádios seguintes.

A sucessão dos vários estádios acontece segundo uma ordem precisa mas com uma cronologia imprecisa, que pode variar consoante o indivíduo e a cultura.

O primeiro dos estádios é, como já referimos, o sensório-motor, com seis sub-estádios, normalmente designados pelos seus números de ordem, que se desenvolvem no período compreendido entre o nascimento e os 2/2,5 anos. Segue-se-lhe o estádio pré-operatório, com dois sub-estádios, o do pensamento intuitivo e o pré-operatório. Aos 6/7 anos a criança entra no estádio das operações concretas, que se decompõe por sua vez em dois sub-períodos: o das operações concretas inferiores e o das superiores. Finalmente, entre os 11/12 anos e os 16, o adolescente constrói o último dos estádios, o das operações formais ou abstractas, passando por dois sub-períodos: o da génese das operações formais (11/12 aos 14 anos) e o das estruturas operatórias formais (14 aos 16 anos) (PIAGET, INHELDER, 1979).

Após os 16 anos, PIAGET considera não haver alterações estruturais significativas no sistema cognitivo.

O nível sensório-motor é caracterizado por esquemas de acção e os níveis operatórios concreto e formal por esquemas operatórios, que, começando por emergir da acção, se vão tornando sucessivamente mais complexos e abstractos até atingirem o pensamento hipotético-dedutivo característico da pessoa adulta.

Vejamos agora algumas características do *estádio das operações concretas*, uma vez que nele se encontram as crianças pertencentes à amostra deste estudo.

O nome deste estádio vem-lhe das operações lógicas que a criança nele adquire. *Operações concretas* são acções interiorizadas, reversíveis e integradas em estruturas. O adjectivo "interiorizadas" utilizado por PIAGET foi conscientemente escolhido para realçar a génese dessas acções mentais a partir de acções realmente praticadas pela criança.

O raciocínio próprio desta idade é "a interpretação inteligente da acção executada" (PIAGET, 1949). Sendo ainda uma forma de pensamento concreto é, no entanto, o primeiro tipo de lógica a aparecer no pensamento humano.

As características essenciais do estádios das *operações concretas* são a *reversibilidade e a conservação.*

Por *conservação* considera-se a capacidade para compreender que através da acção nem todas as propriedades se alteram, permanecendo algumas invariantes.

A *reversibilidade* é a capacidade que permite à criança inverter mentalmente uma determinada operação. É ela que torna possível a conservação. Pode efectuar-se por compensação e por inversão. Um exemplo pode ilustrar estas duas formas. Quando, ao despejar água de um copo baixo e largo, para outro alto e estreito, a criança afirma que a quantidade permaneceu a mesma, demonstra possuir a conservação; se acrescenta, como explicação, que a quantidade permanece a mesma porque o outro copo é mais estreito mas também é mais alto, ela revela possuir um pensamento reversível *por compensação.* Se a explicação dada se refere antes à possibilidade de voltar a despejar a água contida no segundo copo para o primeiro, verificando na prática a igualdade de quantidades, diremos que possui uma reversibilidade *por inversão.*

Recusando a visão "tábua rasa", aceita-se que ao abordar cada novo conhecimento o indivíduo pode ter já formado pré-conceitos. Procura-se conhecer esses pré-conceitos, ajudando-o a ultrapassá-los ou a aproveitá-los na construção de novas aprendizagens.

Acontece frequentemente que um aluno, ao tomar contacto na escola com um novo domínio do conhecimento, possui já determinados conceitos ou abordagens intuitivas desse domínio. Estes pré-conceitos nem sempre constituem obstáculos à aprendizagem, podendo por vezes servir como ponto de partida para uma forma de conhecimento mais profunda.

GINSBURG[18] considera a criança como um matemático intuitivo. Rejeita a visão "tábua rasa" sugerindo que "através da interacção espontânea com o meio ambiente, a criança desenvolve várias técnicas - habilidades perceptivas, padrões de pensamento, conceitos, métodos de contagem - para ter êxito na resolução de problemas quantitativos" (p. 63).

4.3 QUANTO AO PROCESSO ENSINO/APRENDIZAGEM EM GERAL: FUNDAMENTOS PEDAGÓGICOS DO MODELO

O ensino é entendido como orientação e estímulo à aprendizagem.

O papel do professor, como agente de ensino, é o de criar um ambiente estimulante, por um lado pelo tipo de relações que estabelece, por outro pelo interesse das situações pedagógicas que cria.

O professor não ensina processos de resolução de problemas, nem mesmo heurísticas, antes estimula os alunos a que,

[18] Citado por CONFREY, 1990, p. 63.

individualmente ou em grupo, criem as suas próprias estratégias de resolução. O professor só deve intervir se alguma criança precisar de apoio, mas a sua intervenção deve ser heurística restringindo-se a colocar perguntas que considere pertinentes para o desenrolar do raciocínio.

Recorde-se novamente o que no ponto 4.1 deste capítulo se disse sobre PIAGET e o construtivismo.

Sendo os conhecimentos adquiridos lentamente, construindo-se por aproximações sucessivas, nenhum tema é trabalhado e depois abandonado, antes repetidamente retomado e aprofundado.

A BRUNER (1973) se pode atribuir o fundamento deste pressuposto, na medida em que, este autor considera que a aprendizagem deve acompanhar o desenvolvimento. Por essa razão, defende um *curriculum em espiral*, em que as várias noções são retomadas em diversas etapas da escolaridade, no sentido de serem ampliadas, completadas e reorganizadas em sistemas cada vez mais complexos.

Defende que a aprendizagem se deve processar de uma forma activa, através de experiências de pesquisa, exploração, observação, análise de dados e resolução de problemas. Os conceitos, uma vez construídos, devem ser relacionados, integrados em conhecimentos anteriormente adquiridos, organizados em princípios sucessivamente mais gerais[19] (1973).

Advoga uma estratégia de aprendizagem que vai do mais simples ao mais complexo, iniciando-se com experiências de acção que se transformam em representações e considera que o pensamento intuitivo antecede o dedutivo.

Assimila toda a actividade humana a uma estrutura de resolução de problemas.

[19] "Aprendizagem pela descoberta" do original "discovery learning".

Preocupa-se em inscrever a aprendizagem no processo educativo, e enquadrar este num sistema social de valores.

BRUNER (1975) definiu igualmente estádios de desenvolvimento cognitivo: o estádios da representação pela acção[20], o estádio da representação icónica[21], o estádio da representação simbólica[22]. São etapas da representação do conhecimento que se desenvolvem de forma sucessiva mas não exclusiva, sendo o homem adulto capaz de dominar as três modalidades. BRUNER tem alguma relutância em utilizar a palavra "representação" no primeiro estádio. Torneia a dificuldade por recurso à análise da estrutura de hábito como esquema de acção. Esses esquemas são, no fundo, programas de acção nos quais irão assentar a representação icónica e simbólica.

Veja-se ainda o que acerca das sucessivas abordagens ao objecto a conhecer se refere mais à frente, neste 4.3, sobre o sistemismo e suas implicações na aprendizagem.

As interacções sociais horizontais e verticais desempenham um papel fundamental no processo de ensino/aprendizagem, nomeadamente no domínio da validação e formulação. Devem ser estimuladas por recurso ao trabalho de grupo, ao debate em grande grupo, a jogos colectivos. O professor deve desempenhar um papel fundamental como moderador que possui um mais elevado nível de conhecimentos.

As diversas estratégias encontrados pelas crianças, individualmente ou em grupo, quer na resolução de problemas, quer na realização de jogos, devem ser comunicados a toda a classe, discutidas, defendidas, criticadas, alteradas, aperfeiçoadas. Também nestes debates, o professor deve tomar parte activa como moderador.

---

[20] Do original "enactive stage".

[21] Do original "iconic stage".

[22] Do original "symbolic stage."

Este aspecto do modelo tem o seu fundamento no pensamento de VYGOTSKY que nos dá um contributo importante sobre o desenvolvimento cognitivo, construindo uma teoria em que o desenvolvimento humano é explicado pelo aparecimento sucessivo de sistemas psicológicos que unem funções elementares, inicialmente separadas, em novas combinações, caracterizadas por um maior grau de complexidade.

Tal como PIAGET ele considera que os sistemas funcionais de um adulto têm as suas raízes essenciais nas suas experiências enquanto crianças, mas privilegia, nessa construção dos processos psicológicos superiores, as experiências sociais.

Relativamente à aprendizagem, VYGOTSKY oferece-nos reflexões extremamente interessantes pela forma como as relaciona com o desenvolvimento. Na obra "A Formação Social da Mente" (1988), ele analisa as três grandes posições teóricas relativas ao binómio desenvolvimento/aprendizagem.

A primeira dessas posições postula que o desenvolvimento é independente da aprendizagem. São representantes dessa corrente PIAGET e BINET. De uma forma especial este último considera que o desenvolvimento antecede a aprendizagem e constitui um seu pré-requisito. A posição de PIAGET é semelhante, embora considere que é possível estimular o desenvolvimento dentro de certos limites (PIAGET, 1949).

A segunda grande posição teórica é a que postula que a aprendizagem é desenvolvimento, isto é, existe uma total identidade entre estes dois conceitos. Esta posição é sustentada por vários psicólogos e nomeadamente por WILLIAM JAMES que reduziu todo o processo de aprendizagem à formação de hábitos.

A terceira posição procura combinar as outras duas. Considera que o desenvolvimento é o resultado de dois processos essencialmente diferentes mas entre si relacionados: a maturação a nível do sistema nervoso e a aprendizagem que é, em si mesma, um processo de desenvolvimento. Esta teoria, defendida por KOFKA e pelos gestaltistas, apresenta três aspectos que divergem das duas teorias anteriores: combina desenvolvimento psicológico com aprendizagem, sendo os dois processos interactuantes e mutuamente dependentes e atribui à aprendizagem um amplo papel como estimulante do processo de maturação.

VYGOTSKY rejeita as três posições e apresenta uma nova interpretação da relação desenvolvimento/ aprendizagem.

Designa por *nível de desenvolvimento real* o conjunto de capacidades que a criança consegue exercer de forma autónoma. É a este tipo de desenvolvimento que PIAGET se refere.

Define *zona de desenvolvimento próximo* como "a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes" (VYGOTSKY, 1988, p. 97).

Enquanto o *nível de desenvolvimento real* nos indica as funções que já amadureceram, a *zona de desenvolvimento próximo* integra as capacidades que se encontram em processo de maturação. O primeiro caracteriza-nos retrospectivamente o desenvolvimento mental, a segunda caracteriza-o de forma prospectiva.

Segundo o autor, só é possível ter uma imagem completa do estado de desenvolvimento mental de uma criança através do conhecimento, em dado momento, desses dois níveis. A dinâmica da zona de desenvolvimento próximo determina decisivamente a forma como a criança vai evoluir.

As interacções sociais desempenham um papel preponderante e imprescindível, segundo VYGOTSKY, na forma como se desenvolve essa dinâmica.

A avaliação é entendida essencialmente no seu papel regulador do processo de ensino/aprendizagem, nas suas vertentes individual e de classe.

O conhecimento é adquirido a partir de temas integradores, que lhe dão sentido e permitem uma visão cognitiva global. E esta visão integrada é completada por um estudo mais aprofundado de alguns aspectos específicos.

É a abordagem sistémica que pode clarificar e fundamentar estes princípios. De facto este tipo de abordagem veio abrir novas perspectivas na forma como encaramos o conhecimento e a educação.

Comecemos por nos referir à noção de *sistema*, segundo a perspectiva de alguns autores, conforme DURAND (1990, p. 7 e 8).

Para de SAUSSURE um sistema é "uma totalidade organizada, feita de elementos solidários que só podem ser definidos uns em relação aos outros, em função do lugar que ocupam no todo".

Para von BERTALANFFY é um "conjunto de unidades em interrelação mútua".

Para LESOURNE é um "conjunto de elementos ligados por um conjunto de ligações".

Para de ROSNAY é um "conjunto de elementos em interacção dinâmica organizados em função de um fim".

Para LADRIÈRE é um "ser complexo, formado por distintas componentes ligadas entre si por um certo número de relações".

Para MORIN é uma "unidade global organizada de interrelações entre elementos, acções, ou indivíduos".

Para LERBET o conceito de sistema, para além das características da estrutura (totalidade, transformação, e auto-regulação) inclui ainda a noção de energia, não só energia física mas ainda a que lhe vem da informação. Um sistema é então uma estrutura que gera uma energia. Os sistemas abertos não existem enquanto entes isolados, permanecendo em constante relação dinâmica com o ambiente[23] que o rodeia (LERBET, 1986)

---

[23] Do original "environnement".

Destas definições ressaltam os quatro conceitos fundamentais num sistema:

- totalidade, um todo não redutível às suas partes;
- interacção entre os seus elementos, a acção recíproca que modifica o comportamento ou a natureza desses elementos;
- organização ou disposição de relações entre componentes, que produz uma nova unidade possuidora de qualidades não existente nos seus componentes;
- complexidade, que depende não só do número dos seus elementos mas também do número e tipo de relações que os interligam (DURAND, 1990, p. 9-11).

No entanto a abordagem sistémica não pode ser considerada como uma ciência, uma teoria ou uma disciplina. Tal como o estruturalismo ela é uma metodologia que, permitindo reunir e organizar conhecimentos, nos faculta uma visão global da realidade e portanto uma maior eficácia na acção.

Enquanto a abordagem analítica reduz um sistema aos seus elementos mais simples, que examina em pormenor a fim de compreender os tipos de interacções que existem entre eles, a abordagem sistémica, pelo contrário, estuda-o em toda a sua complexidade, recorrendo à modelização/simulação e ao raciocínio analógico. No entanto as duas abordagens devem ser consideradas mais como complementares do que como opostas (ROSNAY, 1977, p. 100). A abordagem analítica é mais adequada ao estudo dos sistemas homogéneos nos quais é válida a aditividade das propriedades elementares. A abordagem sistémica é mais apropriada aos estudo de sistemas hipercomplexos como a pessoa, a sociedade, etc., uma vez que considera a complexidade do global e a aplica ao local, ao particular.

Analisemos o caso do sistema-pessoa (LERBET, 1981). Nele, um Ego, a pessoa propriamente dita, encontra-se em constante interacção com o ambiente, absorvendo e integrando uma parte dele, que passa a constituir o meio-pessoal[24]. O meio-pessoal é a interface entre o Ego e o ambiente, através do qual se processam as trocas mútuas.

Esta forma de encarar o conhecimento, quer a nível do objecto cognoscível quer do ser cognoscente, tem forçosamente implicações no processo educativo.

1º Se cada pessoa é um sistema, possui processos de auto-regulação, o que implica que funciona melhor se gerir ela mesma o seu funcionamento. Logo, em educação, a relação educador/educando deve ser de ajuda/estímulo e de não directividade, deixando ao indivíduo a função de regular a sua própria aprendizagem.

2º Numa abordagem analítica do conhecimento, a aprendizagem efectua-se de forma linear e sequencial. O sistemismo encara sempre uma realidade como um todo, logo a aprendizagem efectua-se por abordagens globais sucessivas, examinando o objecto a conhecer segundo diversos ângulos e retomando o seu estudo repetidas vezes, em contextos diferentes e em níveis sucessivamente mais elevados e complexos.

3º A aquisição de conceitos deve ser realizada em simultâneo com as relações que os interligam e constituem parte integrante do conhecimento.

4º As diversas vertentes do conhecimento devem ser abordadas a partir de temas de integração vertical que possibilitem uma visão global da realidadade.

4.4 QUANTO AO OBJECTO DO CONHECIMENTO A ENSINAR: FUNDAMENTOS DIDÁCTICOS DO MODELO

A Matemática não é considerada como um corpo de conhecimentos irrefutavelmente reconhecidos, logicamente

[24] Do original "millieu".

formulados, que se ensinam sem margem para erros. Procura-se pelo contrário que ela seja construída pelas crianças passo a passo, muitas vezes através de estratégias de tentativa erro, cuidando que as primeiras formas de conhecimento se vão aperfeiçoando e desenvolvendo, expressando-se através de formas sucessivamente mais elaboradas e aprendendo a defender estratégias e processos construídos.

De facto, a Matemática é frequentemente considerada como um objecto difícil de conhecer, que escapa à compreensão da maioria dos seres humanos.

A nossa maior preocupação ao construir o modelo de ensino/aprendizagem foi a de a tornar acessível, interessante e atractiva para todos os alunos e não mais uma ciência fria, rigorosa e infalível, produzida por cérebros superiores e passível de conhecimento apenas por uma elite de predestinados. Houve assim um grande cuidado em o basear num estudo sério dos conceitos e estruturas matemáticas que iriam ser trabalhadas com as crianças segundo a ideia de que o que é melhor conhecido se pode tornar mais simples. Esta preocupação estendeu-se à aplicação do modelo pelas professoras das turmas envolvidas, a quem foi facultado um aprofundamento dos conhecimentos matemáticos.

Não houve, no entanto, conscientemente uma visão da natureza da Matemática enquanto ciência que lhe tenha estado subjacente. As correntes filosóficas que se desenvolveram durante a primeira metade do séc. XX e que ficaram conhecidas por "logicismo", "intuicionismo" e "formalismo" eram, para nós, nessa época, totalmente desconhecidas.

Um olhar "a posteriori" sobre o modelo parece revelar que não terá havido, ainda que indirectamente, influência de nenhuma destas três escolas. Segundo o logicismo, defendido por FREGE, WHITEHEAD e RUSSEL toda a Matemática é uma parte da lógica, e nela encontra os seus fundamentos. Consideram que "uma proposição lógica é uma proposição que possui uma completa generalidade e é verdadeira em virtude da sua forma mais do que do seu conteúdo" (SNAPPER, 1979, p. 208).

BROUWER e os intuicionistas ou construtivistas defendem como Matemática autêntica apenas aquela que pode ser obtida por construção finita (PONTE, 1990, BROWDER e MACLANE, 1988, DAVIS e HERSH, 1988, SNAPPER, 1979). Assim, só consideram a existência de entes matemáticos se estes puderem ser construídos de forma explícita.

Por sua vez HILBERT advogou que a correcção de uma teoria matemática assenta numa formalização como garantia da não existência de contradições. Das três escolas parece ter sido certamente esta última a que maior influência exerceu. É conhecido o grupo de matemáticos franceses denominado BOURBAKI como um verdadeiro bastião do formalismo.

Também o ensino da Matemática foi claramente influenciado por esta corrente filosófica. No entanto o aparecimento e a crescente audiência do construtivismo no domínio da educação matemática[25] veio criar uma zona de conflito:

- Por um lado, uma Matemática dedutivista e isenta de erros não só a nível do seu desenvolvimento como do seu funcionamento (formalismo);
- Por outro lado, uma visão construtivista da produção do conhecimento na qual os conflitos, os erros e os desequilíbrios jogam um papel central (BALACHEFF e LABORDE, 1984).

As ideias de Imre LAKATOS, que punham em causa o formalismo e lançavam novas perspectivas no campo da filosofia da Matemática tiveram grande aceitação. Na sua obra "Provas e Refutações" afirma: "O núcleo deste estudo de caso desafiará o

[25] No domínio da educação matemática o construtivismo tem a sua génese em PIAGET e não em BROWER e na escola intuicionista/construtivista. PIAGET, no entanto, estabelece algumas relações com essa escola na sua obra "Epistemologia genética", 1986.

formalismo matemático, mas não desafiará directamente as posições últimas do dogmatismo matemático. Seu modesto objectivo é formular a questão de que a Matemática não formal semi-empírica, não progride mediante monótono aumento do número de teoremas indubitavelmente estabelecidos, mas mediante incessante aperfeiçoamento de opiniões por especulação e crítica, pela lógica das provas e refutações" (LAKATOS, 1978, p. 8).

Segundo me parece, o modelo de ensino/aprendizagem da Matemática utilizado neste estudo não se situa numa posição próxima de qualquer das três escolas acima mencionadas, a logicista, a intuicionista e a formalista. De facto, não foi o ensino de uma Matemática rigidamente formalizada, isenta de contradições, dando a aparência de edifício perfeitamente construído, tão do gosto quer de logicistas quer de formalistas, que o modelo adoptou. Assenta antes na preocupação de que a Matemática seja construída pelas crianças através de ensaios de tentativa erro, de busca de estratégias próprias de resolução de problemas, da utilização de dialécticas interactivas com a finalidade de encontrar formas sucessivamente mais correctas de expressar os raciocínios, e de apresentar a defesa ou a crítica dos processos utilizados.

Procura-se que as crianças trabalhem com prazer em Matemática, adquiram o gosto por esta ciência e a auto-confiança nas suas capacidades

Confere-se grande atenção à construção dos conceitos matemáticos, que se realiza através da resolução de problemas.

Procura-se que, sempre que possível, os diversos conceitos se relacionem entre si.

Recorde-se o que ficou dito em 4.3 sobre a abordagem sistémica e a importância de relacionar os conhecimentos.

Para além das situações problemáticas utilizam-se outras formas pedagógicas - jogos, exercícios de cálculo, construções geométricas, etc. - como meios para a construção de conhecimentos.

De entre os jogos destacamos os "jogos de comunicação" pelo seu grande interesse didático. Trata-se de jogos de equipas em que uma parte da equipa transmite uma mensagem à outra parte, que deverá descodificá-la. Os jogos de comunicação, constituindo-se como situações problemáticas, são meios privilegiados de construção de conhecimentos.

Vejamos, a propósito, alguns aspectos da teoria de BROUSSEAU, autor que utiliza frequentemente os jogos de comunicação no ensino da Matemática.

Começo por referir o que este autor entende por *modelo de uma situação.*

Imaginemos uma situação, isto é, uma certa combinação de seres ou objectos entre os quais existem determinadas relações. Consideremos agora uma estrutura matemática tal que seja possível estabelecer correspondências de significado e significante entre alguns dos elementos e das relações da estrutura e os elementos e relações da situação. As partes da estrutura associadas a objectos da situação dizem-se concretamente significativas. Por outro lado, determinadas relações da situação têm consequências. Se acontecer que as consequências das relações da estrutura sejam concretamente significativas das correspondentes consequências na situação, a estrutura permitirá efectuar conjecturas válidas. Diz-se, neste caso, que essa estrutura é um modelo da situação.

Imaginemos agora que uma criança é colocada perante uma situação que envolve um problema em cuja solução ela está interessada. Imaginemos ainda que ela possui um modelo mental mais ou menos satisfatório, que não consegue expressar, mas que lhe permite actuar sobre a situação. Essa criança vai entrar em diálogo com a situação no sentido de procurar a solução, isto é, ela vai agir sobre os objectos e receber deles o correspondente "feedback". A esta forma de diálogo chama o autor "dialéctica de acção". Ao modelo mental, não expresso, no qual ela se baseia, e que conduz a sua acção, chama "modelo implícito".

Se o modelo resolve o problema que se inscreve na situação, há a tendência a empobrecê-lo a cada nova utilização. Torna-se cada vez mais geral, logo aplicável a um maior número de situações. Se o modelo não resulta, isto é, não resolve o problema, há a tendência a enriquecê-lo na esperança de obter melhores resultados, até que seja abandonado por inadequado. Recorde-se a propósito um caso histórico que ilustra o que acabámos de referir: o modelo ptolomaico de representação do universo e o seu sucessivo enriquecimento com epiciclos até ao seu abandono em favor de um outro muito mais geral - o de Copérnico.

Seguindo as ideias de PIAGET, BROUSSEAU considera que cada novo modelo é construído a partir de anteriores, por assimilação ou acomodação.

O modelo implícito a que atrás nos referimos recebe a sua designação pelo facto de a criança, apesar de o saber aplicar, não ser capaz de o expressar, explicar ou defender. Ele é apenas o guia mental da sua acção. É através de interacções com os seus pares, isto é, de diálogos estabelecidos com crianças da mesma idade igualmente empenhadas numa mesma utilização do modelo, que a criança vai aprender, por um lado a expressá-lo e por outro a defendê-lo.

A este diálogo estabelecido entre as crianças no sentido de expressarem os seus modelos segundo formas cada vez mais eficazes, sucintas e apropriadas, caminhando no sentido de uma formulação matemática correcta e pertinente, chama BROUSSEAU "dialéctica de formulação".

O diálogo estabelecido no sentido de defenderem os seus pontos de vista, mostrarem a correcção dos seus raciocínios, validarem os seus modelos, é designado por BROUSSEAU como "dialéctica de validação".

Porque advoga o autor que estes diálogos se estabeleçam privilegiadamente entre os próprios sujeitos--aprendizes e não, entre aluno e professor? É porque, segundo ele, o que o professor diz está "a priori" certo. "Magister dixit" diziam os romanos, e a palavra do mestre era incontestável. Então, a criança repousa na opinião do adulto e demite-se de raciocinar, de defender, de tentar provar as suas razões. A própria história da Matemática fornece-nos argumentos a favor desta posição. As formas de demonstração evoluíram acompanhando a evolução social, tornando-se mais pertinentes à medida que a comunidade científica se tornava mais exigente. Algumas demonstrações matemáticas do séc. XVI parecem-nos hoje pouco profundas, quase ingénuas.

É, pois, no diálogo com os seus pares, que a criança necessita de utilizar os seus melhores argumentos, aprender a formular os seus raciocínios de uma forma cada vez mais correcta e rigorosa.

Tal como PIAGET, BROUSSEAU defende a construção do conhecimento pelo próprio sujeito e, tal como VYGOTSKY, ele privilegia as interacções entre os vários sujeitos como agentes construtores do seu próprio conhecimento.

Para BROUSSEAU, uma boa situação pedagógica é aquela que, sendo em si mesma suficientemente estimulante do interesse dos alunos, tenha sido construída de tal forma que a solução do problema que contém seja o conceito ou estrutura matemática que se pretende que a criança adquira. Assim, ao resolver a situação problemática, ele constrói o conhecimento.

A capacidade do professor mede-se, pois, pelo engenho com que constrói situações deste tipo. Não existe, segundo o autor, uma aprendizagem natural da Matemática, no sentido de resultar unicamente das vivências naturais do dia a dia, como defende, por exemplo, a corrente pedagógica de C. FREINET.

No entanto, pensamos que é possível considerar uma aprendizagem natural da Matemática mas num outro sentido: na medida em que respeita a forma de raciocínio própria de cada criança e de cada um dos estádios do seu desenvolvimento.

A aprendizagem dos números naturais efectua-se essencialmente através de muitas e diversificadas situações de contagem, seguidas normalmente de registo dos respectivos numerais. Cuida-se também da aquisição das operações lógico-matemáticas em crianças que manifestem necessitar de apoio.

No domínio das operações aritméticas a principal preocupação está na aquisição do sentido das operações[26]. Considera-se como "sentido de uma operação" a classe de situações problemáticas que se resolvem através dessa operação. Esta aprendizagem faz-se essencialmente através da resolução de problemas. O cuidado especial com esta aprendizagem justifica-se pela grande importância de que os conceitos das operações se revestem em largas áreas da Matemática e muito especialmente na resolução de problemas numéricos. Inclusivamente outros aspectos operatórios, como o cálculo mental, o cálculo escrito ou através de calculadoras e o estudo das propriedades terá de ser desenvolvido através do conceito da operação respectiva.

Estimula-se o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental, não só a partir da resolução de problemas mas ainda de exercícios diversos especialmente pensados para o efeito.

Os algoritmos são construídos igualmente a partir da resolução de problemas ou de jogos, começando por ser teoremas-em-acção (VERGNAUD, 1990) antes de passarem a verdadeiros algoritmos.

Os algoritmos correspondentes a técnicas de cálculo operatórias só são estudados depois de as crianças haverem construído os respectivos sentidos das operações, desenvolvido o cálculo mental e dominado a estrutura do sistema de numeração indo-árabe.

Considera-se que na "sociedade informática" em que nos encontramos, eles desempenham um papel secundário. Concorda-se com FERRARI (1991) o qual defende que as primeiras experiências

[26] Conceito possível nesta idade.

conducentes ao raciocínio hipotético-dedutivo se desenvolvem com maior facilidade se se retardar o aparecimento dos algoritmos.

A estrutura do sistema de numeração decimal merece a maior atenção. A sua aprendizagem passa por duas etapas. Na primeira a criança vai desenvolvendo e utilizando um seu "modelo implícito" (BROUSSEAU, 1970) em actividades de contagem, na resolução de problemas por processos mais ou menos informais, no exercício do cálculo mental. Em simultâneo vão-se efectuando jogos de equivalências entre agrupamentos em diversas bases, realizados sobre material manipulativo estruturado ou não estruturado, que irão preparando a construção de um "modelo explícito" de numeração. É a construção deste modelo explícito, cuja representação se faz, numa primeira forma, sobre uma grelha, que constitui a segunda etapa de aprendizagem do sistema de numeração indo-árabe.

A aquisição dos números decimais processa-se a partir do modelo explícito do sistema de numeração, tendo por base experiências de partição da unidade.

A geometria é estudada através de manipulação de modelos e outros tipos de material mais ou menos estruturado, como geoplanos, barras geométricas, etc., de construções mais ou menos rigorosas, de jogos, que permitem a descoberta de características e propriedades. Parte-se de uma visão sincrética global do mundo que nos rodeia. A passagem por uma fase analítica vai permitindo a construção gradual de uma visão global sintética.

A medição emerge de inúmeras actividades sobre situações problemáticas em que a criança tem necessidade de aváliar grandezas sem que ninguém lhe ensine directamente a medir. Através delas a criança vai construindo as operações de

conservação e seriação e aprendendo a medir, passando sucessivamente por um "modelo de comparação", um "modelo de medição" e atingindo, no caso das áreas, um "modelo de cálculo" (PIRES, 1987).

Estimula-se a prática da estimativa como forma de controlo quer de cálculo quer de medição.

Como principal falha deste modelo aponta-se a não utilização dos actuais meios tecnológicos, calculadora e computador, questão a ter em atenção numa próxima reformulação, dado o seu grande potencial como facilitadores da aprendizagem.

CONCLUSÃO

As características essenciais do modelo pedagógico que neste capítulo se traçaram têm como base um pressuposto fundamental: o de que a criança é capaz de construir o seu próprio conhecimento. Este facto, só por si, explica a grande importância atribuída, na experiência que esteve na base do presente estudo, aos processos informais criados pelas crianças para a resolução de problemas.

Autores como PIAGET, BRUNER, ROGERS, LERBET, VYGOTSKY e BROUSSEAU permitiram-nos, com as suas teorias, fundamentar o modelo.

CAPÍTULO 5

OPERACIONALIZAÇÃO DO MODELO DE ENSINO/APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

"Os educadores, os formadores, os professores tendem a comprometer-se cada vez mais em itinerários de investigação a partir da sua própria experiência e vivem este compromisso como uma forma de qualificação " (BARBIER, 1990).

O Projecto no âmbito do qual foi construído o modelo de ensino da Matemática que acabámos de caracterizar no capítulo anterior, tendo-se desenvolvido segundo os parâmetros de uma investigação-acção, é um exemplo de tal facto. Para melhor compreender esse modelo procura-se, neste capítulo, situá-lo num horizonte mais vasto de toda a experiência que o contextualiza e lhe confere o seu verdadeiro sentido. Referir-se-à especialmente o sistema pedagógico-didáctico que o integra.

Por outro lado, e numa segunda parte do capítulo, procura-se mostrar como o modelo de ensino/aprendizagem da Matemática foi levado à prática pedagógica das salas de aula.

5.1 CONTEXTO DA OPERACIONALIZAÇÃO

O termo *investigação-acção* surge nos finais dos anos 30 com K. LEVIN numa tentativa de conciliar objectivos de mudança social localizada com o método de investigação experimental clássico. Esta primeira concepção foi, no entanto evoluindo, tendo-se abandonado a excessiva preocupação com a objectividade do processo investigativo a favor de uma maior ênfase na participação dos diversos actores sociais envolvidos num esforço de mudança em torno de uma situação problemática (LANDSHEERE, 1986). Actualmente, a investigação-acção deixou de se preocupar em seguir itinerários previamente estabelecidos por um investigador e de tentar isolar varáveis definidas como pertinentes. É antes uma modalidade de investigação que se processa no meio da complexidade de uma situação social, e não em laboratório. É uma pesquisa *sobre a acção*, procurando analisar e controlar as práticas que a envolvem e *para a acção*, pois visa transformá-la em função da resolução de problemas. Não pode ser confundida com a *observação participante*, uma vez que nesta o contacto com o "terreno", objecto do estudo, ainda que prolongado, é controlado de forma a evitar, o mais possível, qualquer modificação[27].

A investigação-acção, sendo um processo de mobilização de esforços com vista à transformação de uma situação existente, não perdeu todavia o seu carácter investigativo, que emerge de uma séria preocupação de rigor no controlo das prácticas envolvidas e de uma avaliação exigente. Apesar disso LANDSHEERE (1986, p. 32) considera que "se trata muito menos de uma investigação científica do que de estratégia de inovação e activação". Pelo contrário, o International Council for Adult Education (1977) defende-a como uma metodologia de investigação mais científica do que a investigação tradicional na medida em que a participação de todo a comunidade possibilita um conhecimento mais autêntico e profundo da realidade social.

Na verdade, esta forma de investigação supõe a colaboração de todos os elementos da comunidade envolvida, para além do investigador ou grupo de investigadores, numa acção conjunta em que o papel dos diferentes actores se interpenetra: os investigadores vêem-se frequentemente envolvidos na práctica e os participantes sentem-se implicados na investigação.

Esta proximidade de funções "é não somente desejável (mas) necessária ao funcionamento do processo: subjectividades, opções,

[27] No entanto, reconhece-se cada vez mais que tal preocupação raramente evita os efeitos da interferência.

valores, implicações ficam comprometidas no andamento da investigação, assegurando-lhe a dinâmica específica" (BARBIER, 1990).

Em nossa opinião, a investigação-acção, quando conduzida com rigor, permite aos actores que nela intervêm com postura investigativa, a recolha de dados sobre a realidade em que se actua, a mudança dessa realidade em função do(s) problema(s) diagnosticado(s), bem como a formação dos diversos actores participantes, constituindo-se assim como metodologia científica e processo de intervenção.

Vejamos então os mais significativos passos deste tipo de metodologia. Como em qualquer processo de investigação, numa primeira fase procura-se identificar o "objecto" de investigação, que, nos casos em que a investigação-acção mais se aplica, consiste na problematização de uma situação contextualizada temporal e socialmente para a qual os investigadores procuram dar um contributo para a solução de alguns problemas relevantes. O plano de investigação-acção a traçar, em consequência do objecto e da finalidade do projecto, implica o levantamento de diagnóstico, o reconhecimento dos factores contextuais e a condução e realização de programas de intervenção, de recolha de dados e de avaliação contínua do processo, de modo a dele poder resultar um maior conhecimento da situação em termos teóricos e de intervenção.

A execução desse plano implica normalmente a construção de materiais de apoio à acção e um acompanhamento atento e participado que gera em cada momento as adaptações julgadas necessárias. A avaliação deve ser rigorosa,para o que se torna necessário escolher indicadores e construir instrumentos de recolha de dados

Para alguns autores, o objectivo primordial de um processo de investigação-acção não é a produção de conhecimento científico mas de conhecimento praxiológico, isto é: novas concepções dos diversos aspectos da acção, novos objectivos, novos processos, novas formas de actuar, novos instrumentos, nos quais os traços de inovação podem estar mais ou menos presentes. Surgem como específicos de uma determinada situação, não sendo como tal, directamente generalizáveis. "Eles são em primeiro lugar reapropriados pelos próprios actores e permitem, mediante algumas outras condições, a produção da mudança propriamente dita, isto é, o compromisso efectivo com novas práticas, e novas iniciativas, e novos comportamentos. São igualmente susceptíveis de ser integrados no próprio processo de pesquisa e de acção de actores colocados em situações semelhantes", do que resulta o grande interesse na comunicação da investigação e dos seus resultados (BARBIER, 1990, p. 182).

Para outros autores porém (ESTEVES, 1990) o percurso de investigação pode, em qualquer das suas etapas, originar produção de conhecimento aplicando sobre os dados investigativos as abordagens de investigação científica e os instrumentos adequados.

É neste perspectiva que, enquanto investigadores participantes no Projecto de investigação-acção «Ensinar é Investigar», recolhemos os dados que nos permitem realizar a presente investigação.

5.2 O MODELO PEDAGÓGICO DO PROJECTO «ENSINAR É INVESTIGAR»

O modelo de ensino/aprendizagem da Matemática caracterizado no Capítulo 4 faz parte de um outro mais vasto que surgiu como produto de uma investigação-acção: *o modelo pedagógico* do Projecto «Ensinar é Investigar». Importa, por tal razão, descrevê-lo ainda que sucintamente.

No capítulo das conclusões far-se-á alusão a um outro produto, a mudança de perspectiva pedagógica dos professores, que nos parece igualmente de assinalar.

O modelo pedagógico, cujo diagrama se apresenta na fig. 5.1, foi concebido como um instrumento do dispositivo experimental, destinado a apoiar a actividade pedagógica. Trata-se de uma estrutura com duas vertentes distintas, mas complementares:

- um *quadro teórico de referência*, organizado com base em domínios como o da Epistemologia, das

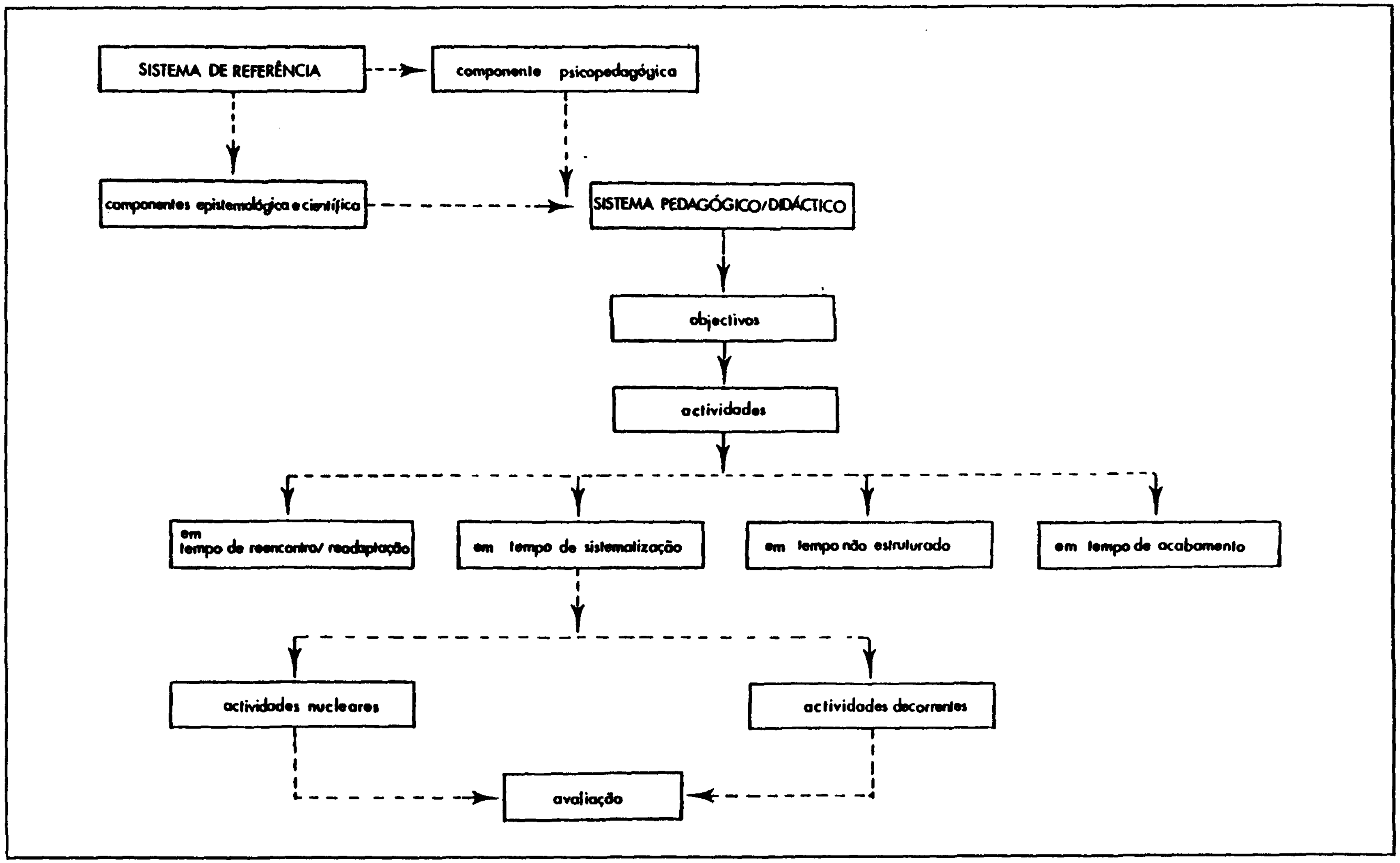


Figura 5.1 - Diagrama do modelo pedagógico

Ciências da Educação e das diversas áreas científicas a abordar, tais como a Linguística, a Matemática, a Sociologia, a Biologia, a Geografia, ...

- um *sistema pedagógico-didáctico* que se desdobra em objectivos, actividades e avaliação.

O modelo foi concebido numa perspectiva sistémica, segundo uma abordagem pluridisciplinar em que os diversos saberes se relacionam e interagem. O conjunto de propostas pedagógico-didácticas estrutura-se em torno de temas integradores, que se desenvolvem ao longo dos quatro anos, segundo o esquema da fig. 5.2.

No que respeita à primeira componente do sistema pedagógico-didáctico, os objectivos foram pensados tendo em conta não só a aprendizagem de conteúdos, mas de forma especial a aquisição de capacidades e de atitudes. Actuam essencialmente como linhas orientadoras, situando-se o modelo numa perspetiva de pedagogia com objectivos e não de uma pedagogia por objectivos (LEITÃO, 1992).

As propostas de actividades visam por um lado os objectivos propostos e por outro procuram ter em consideração a criança a que se destinam. Não se pode ignorar a sua história pessoal ao longo da qual ela se foi estruturando como pessoa e adquirindo capacidades, atitudes e conhecimentos.

Finalmente, no que respeita a avaliação procura-se:

- "provocar e fornecer pontos de apoio à reflexão conjunta dos professores sobre as dinâmicas desencadeadas pelas interacções entre os protagonistas educativos - alunos, tarefas escolares e professor";
- "provocar, e fornecer pontos de apoio à reflexão conjunta dos alunos no sentido de organizarem, e adquirirem, estratégias de formulação e validação dos processos que guiam a própria acção, o que lhes permitirá progredir nas suas aprendizagens" (LEITÃO, 1992).

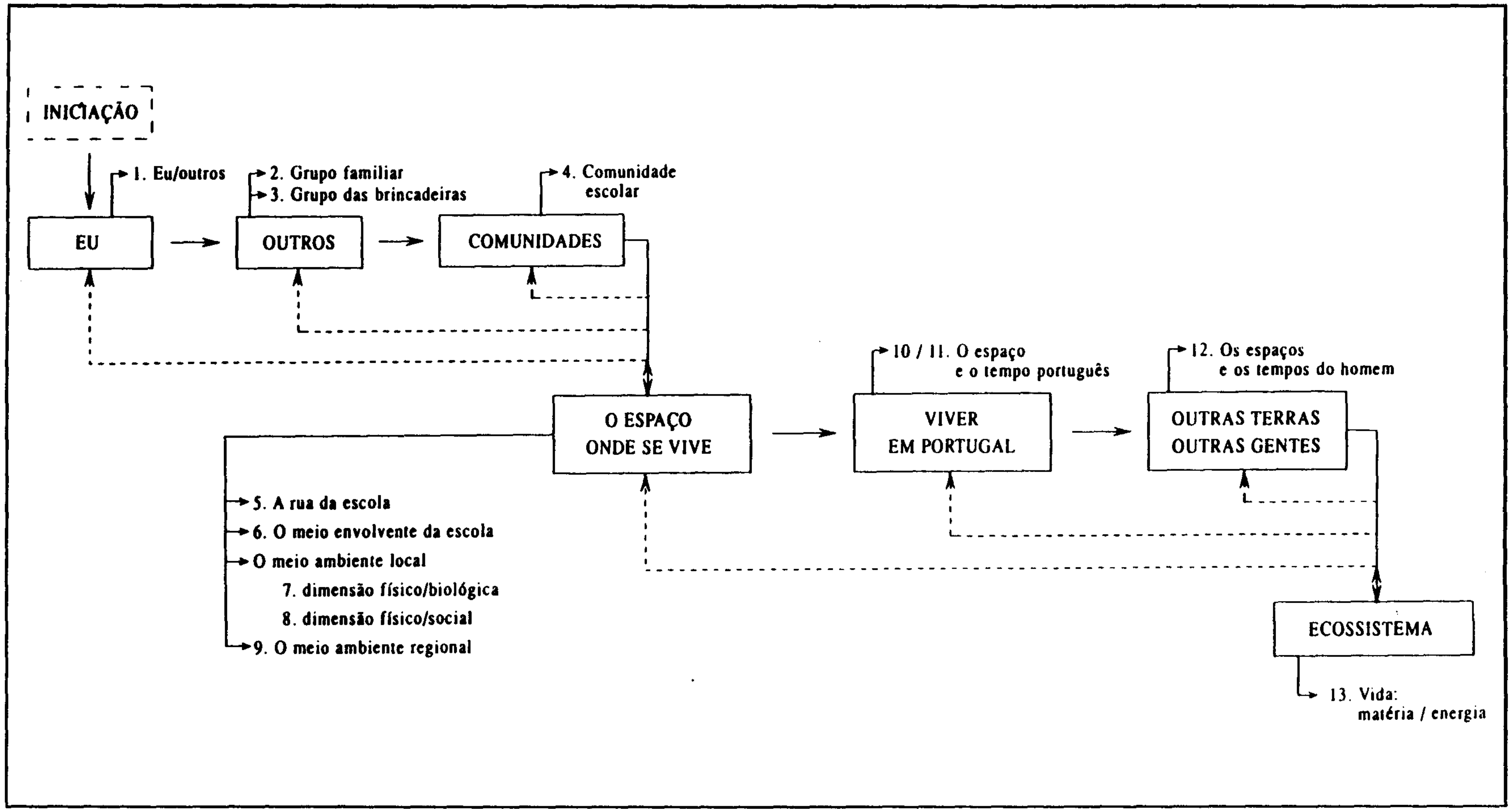


Figura 5.2 - Sequência de temas do modelo pedagógico

5.3 UM EXEMPLO DA OPERACIONALIZAÇÃO DO MODELO DE ENSINO/APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Voltemos agora de novo ao modelo de ensino/aprendizagem da Matemática que constitui apenas uma parte do modelo pedagógico experimental que acabámos de referir. No sentido de tornar mais clara a sua caracterização iremos descrever um exemplo da forma como foi operacionalizado. Trata-se de uma sequência de actividades promovidas no sentido de estimular a aprendizagem da resolução de problemas e, simultaneamente, dos sentidos da adição e da subtracção.

Pelos finais do primeiro trimestre do 1º ano de escolaridade, as crianças foram confrontadas com as primeiras situações problemáticas verbais, questões muito simples, de início só de adição, mas, logo de seguida, também de subtracção. Envolviam objectos que todos os alunos possuíam: cadernos, livros, lápis, berlindes, etc.. Quando, pouco tempo depois, passaram a referir seres não presentes, embora pertencentes ao universo das crianças, como automóveis, bolos ou monstrinhos, foi colocado à sua disposição material de concretização com o qual podiam representar os objectos e a acção referidos no problema. Os alunos eram livres de utilizarem ou não o material. Se, no entanto, não conseguissem chegar a uma solução verdadeira, era-lhes sugerido que verificassem o processo, concretizando a situação.

Quando encontravam mentalmente a solução correcta, sem utilizar o material, era-lhes pedido que, por meio de um desenho, explicassem como tinham resolvido o problema, sem no entanto lhes fornecer qualquer indicação de como podiam fazê-lo.

A finalidade de tal sugestão era a de ajudar a criança a:

- aprender a expressar de maneira informal o seu raciocínio;
- compreender que o processo utilizado na resolução do problema é tão importante ou mais do que o resultado obtido e por tal razão importa comunicá-lo;
- adquirir esquemas de apoio ao raciocínio operatório;

- facilitar o acesso a formas simbólicas de expressão do conhecimento (BRUNER, 1975).

A utilização sistemática da expressão verbal em tais casos, para além de se tornar impraticável em turmas numerosas, não permite atingir todos os objectivos assinalados. Assim era apenas solicitado a algumas crianças que, após terem efectuado o problema, se deslocassem ao quadro para apresentar às outras os seus processos de resolução.

A inclusão deste procedimento pedagógico no modelo de ensino/aprendizagem deveu-se a anteriores intervenções/observações por nós realizadas com crianças desta idade, onde a importância da expressão icónica se havia manifestado como muito relevante para o desenvolvimento do raciocínio. O feedback obtido, quer a partir dos relatos dos professores que aplicaram o modelo nas suas classes, quer dos trabalhos dos alunos, veio reforçar esta percepção. Ele deve ser tido em conta aquando da análise dos resultados.

As fronteiras entre os diversos tipos de estratégias nem sempre surgiram com grande clareza, pelo menos de início. Um exemplo curioso que ilustra tal facto aconteceu quando uma menina tentava usar uma representação icónica para resolver o seguinte problema:

O Luís tinha 6 bolachas
Comeu 2.
Com quantas bolachas ficou?

Ela desenhou 6 bolinhas. Levantou-se então e foi pedir uma tesoura para recortar as 2 "bolachas" que o Luís tinha comido. A professora, na tentativa de que a criança se desembaraçasse sem o recurso da tesoura, disse que não tinha ali nenhuma disponível. A pequena pensou um pouco e exclamou:

- Não tem mal. Vou picotá-las.

E assim acabou por praticar a acção de retirar as bolachas desenhadas.

Por vezes propunham-se dois problemas seguidos em que a acção referida no segundo "desfazia" a do primeiro, com a finalidade de ajudar a tornar consciente a reversibilidade entre os dois raciocínios, o de adição e o de subtracção.

Duas a três semanas depois do início desta aprendizagem, quando as crianças já demonstravam facilidade na resolução destes problemas elementares, o professor mostrou como é possível expressar um raciocínio de resolução do problema através de uma expressão numérica aditiva ou subtractiva.

Surgiram as primeiras representações simbólicas. No entanto manteve-se sempre a liberdade de opção pela estratégia a utilizar. No Anexo IV podemos encontrar alguns exemplos destes processos iniciais.

Assim que as crianças se mostraram seguras desta nova forma de expressão e demonstraram ter adquirido os sentidos das duas primeiras operações aritméticas, foram-lhes apresentadas situações que envolviam simultaneamente os dois tipos de raciocínio operatório. Isto aconteceu em meados do segundo trimestre desse mesmo ano. Houve também a preocupação de confrontar as crianças com situações problemáticas que referiam dados superabundantes ou insuficientes. Neste último caso os dados em falta eram conhecidos das crianças ou fáceis de obter.

Nesta fase da escolaridade os problemas eram sempre colocados oralmente, uma vez que os alunos não sabiam ainda ler ou liam com dificuldade. Cada situação era apresentada duas vezes, no mínimo, de forma a possibilitar uma primeira apreciação global seguida de outra analítica. Quando se tratava de um problema mais complexo, era promovido o debate em pequenos grupos. As situações mais simples eram resolvidas individualmente, tendo no entanto, as crianças a liberdade de as discutirem com outras, de irem buscar material, consultar, medir, etc..

Enquanto as crianças trabalhavam, o professor preocupava-se em detectar se alguma se encontrava em dificuldades e intervinha junto dela colocando perguntas pertinentes ao desenrolar do raciocínio ou fazendo sugestões que a ajudassem a ultrapassar o impasse.

Segundo a nossa observação, uma criança que, repetidas vezes, não consiga resolver os problemas, perde a confiança em si mesma e desiste de raciocinar.

Quando todos os alunos, ou grupos de alunos, haviam encontrado o esquema de raciocínio de resolução do problema, o professor convidava representantes das diferentes estratégias construídas, a irem ao quadro expô-las, cuidando de que, ao longo dos diversos momentos, todas as crianças tivessem oportunidade de o fazer. As diferentes propostas eram então discutidas, havendo o cuidado de notar qualquer possível erro, na perspectiva de que é importante aperfeiçoar os processos encontrados. Aliás, os processos constituíam, invariavelmente, o centro do debate, enquanto que a solução do problema era encarada apenas como o resultado natural de um processo válido. A forma de expressão era igualmente alvo de discussão, nomeadamente a nível do aperfeiçoamento da linguagem matemática.

Neste primeiro ano de escolaridade houve a preocupação de estimular as crianças no sentido de resolverem um mesmo problema de várias maneiras.

Isto foi feito com um triplo objectivo:

a) desenvolver a criatividade na resolução de problemas;

b) dar uma maior segurança, um maior domínio na resolução de problemas;

c) desenvolver práticas autocorrectivas.

Nenhuma das estratégias encontradas deveria ser valorizada relativamente às outras, nomeadamente no momento de apresentação e discussão conjunta dos diversos processos surgidos. Nos anos subsequentes, essa preocupação foi sendo gradualmente substituída por uma outra: estimular as crianças na crítica e defesa dos caminhos encontrados, desenvolvendo em cada uma, não só a capacidade para escolher o melhor entre vários e para o defender, como ainda para criticar, argumentando, as estratégias dos seus companheiros.

Por vezes os problemas eram inventados pelos próprios alunos. De uma forma especial era-lhes pedido que criassem situações de adição, ou de subtracção, ou que envolvessem simultaneamente os dois raciocínios, com o objectivo de tornar mais consciente e operacional o sentido de cada operação.

Durante todo o primeiro ano, os problemas foram resolvidos com recurso ao cálculo mental, uma vez que os algoritmos das operações só começaram a aparecer a partir do 2º ano.

A resolução de problemas constituiu sempre o núcleo de todo o processo de ensino/aprendizagem, na tripla perspectiva de "via de construção dos conhecimentos matemáticos", "forma de aplicar esses mesmos conhecimentos" e "objecto de aprendizagem em si mesma" (LESTER, 1980b). Ao longo dos quatro anos as crianças resolveram diariamente situações problemáticas, quer se tratasse de problemas numéricos ou não numéricos, propostos pelo professor, criados pelas crianças, apresentados em forma de jogos ou de outras actividades. Isto não significa, conforme o já referido, que todo o trabalho no âmbito da Matemática tenha sido desenvolvido por esta via. Pensamos, no entanto, que ela terá sido a principal responsável pelo enorme gosto por esta disciplina que as crianças parece terem adquirido .

CONCLUSÃO

A metodologia de investigação-acção, ao tornar possível a construção de novas representações e de novas formas de actuar, permite despoletar processos de transformação de práticas educativas, de formação de professores e de introdução de inovação.

Frequentemente dá origem à produção de saber e de conhecimento, quer como produtos finais da investigação, quer como inovação de processos de trabalho construídos no decurso da investigação-acção.

O modelo de ensino/aprendizagem da Matemática que se utilizou na experiência integra-se no modelo pedagógico elaborado a propósito de um projecto de investigação-acção e só nesse contexto ele ganha a sua verdadeira dimensão.

A forma como foi operacionalizado possibilitou que os pequenos alunos fossem construindo os conceitos matemáticos enquanto aprendiam a resolver problemas. Esta aprendizagem simultânea faz realçar o papel de resolução de problemas não só como conteúdo mas ainda como meio através do qual se constrói o conhecimento matemático.

PARTE III

PROCESSOS E ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

CAPÍTULO 6

METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Nos processos de resolução de problemas as estratégias adoptadas desempenham um papel fundamental, possibilitando, ou não, obter êxito no itinerário percorrido em busca da solução. Daqui resulta uma natural preocupação com as estratégias quando se procura aprofundar o estudo dos processos de resolução de problemas. As questões que se procura investigar nesta dissertação seguem esta perspectiva. São elas, conforme o já referido no Capítulo 1:

Questão 1 Os processos naturais criados pelas crianças para resolverem problemas evidenciam a utilização regular de algumas estratégias ?

Questão 2 As diferentes estratégias utilizadas estão relacionadas com o nível de factor g fornecidas pelas matrizes de Raven ou com o nível de competência matemática?

Questão 3 Os iniciais processos informais das crianças evoluem transformando-se em outros mais abstractos e formais?

Para tentar responder a estas questões utilizou-se uma metodologia de investigação da qual se apresentam, neste capítulo, os principais aspectos.

6.1 AMOSTRA

Neste estudo utilizaram-se os trabalhos de 208 alunos que integraram o Projecto «Ensinar é Investigar» durante os quatro anos do Ensino Primário. Estes trabalhos constituem o "corpus" da investigação. Não se puderam considerar todos os sujeitos da amostra do Projecto devido a duas diferentes dificuldades.

A primeira residiu no facto de, numa das turmas, a forma como as crianças resolveram o 2º problema do teste que serviu de base para estudarmos as duas primeiras questões de investigação, apresentar uma anomalia difícil de interpretar. O enunciado desse problema, que consta do Anexo II, refere um dado superabundante. Todas as crianças dessa turma o resolveram inicialmente considerando, nos seus cálculos, o dado superabundante. De seguida voltaram a resolvê-lo sem utilizar esse dado. O que terá levado *todos* os alunos a modificarem o primeiro processo utilizado? Qual dos dois processos deveria ser considerado? Na incapacidade de dar resposta satisfatória a estas perguntas, optou-se por eliminar globalmente a referida turma.

O facto de não possuirmos o registo escrito da resolução do teste final do 1º ano ou o nível de "factor g" das matrizes de Raven de algumas crianças de outras turmas obrigou-nos igualmente a eliminá-las da amostra. Esta segunda dificuldade foi causada pelo absentismo durante o tempo em que os referidos testes foram passados.

6.2 INSTRUMENTOS DE RECOLHA DE DADOS

No sentido de encontrar uma resposta para a 1ª Questão formulada, utilizaram-se os registos escritos dos processos de resolução de três problemas. Esses problemas pertenciam ao teste de avaliação da aprendizagem do final do 1º ano de escolaridade. Encontram-se no Anexo II.

Quanto à 2ª Questão, os dados utilizados foram: os mesmos processos de resolução dos três problemas que acabámos de referir, os níveis de factor geral de inteligência obtidos por aplicação das matrizes de Raven e ainda as classificações gerais de teste final do 1º ano a que os três problemas pertenciam.

As matrizes de Raven foram aplicadas às crianças da amostra na segunda metade do 1º ano.

Os dados utilizados no estudo da 3ª Questão de investigação foram os registos escritos dos processos de resolução de todos os problemas constantes dos testes de avaliação.

Os testes de avaliação de aprendizagem em Matemática continham normalmente os enunciados de três problemas. Foram efectuados em onze diferentes momentos: durante o 1º ano apenas em Fevereiro e Junho, nos restantes anos no final de cada trimestre escolar.

Podemos ainda referir como fonte de recolha de dados, nomeadamente a nível do comportamento dos alunos, os professores da prática pedagógica que constituíam o Grupo II da equipa do Projecto. Para além de terem aplicado o modelo pedagógico nas suas salas de aula foram também eles que passaram os testes de avaliação das aprendizagens.

Seguidamente indicam-se algumas características dos instrumentos de recolha de dados que se utilizaram.

As Matrizes Progressivas de Raven constituem-se como um teste de medição das aptidões intelectuais para estabelecer relações. Procuram determinar a capacidade actual de compreender e de raciocinar de um indivíduo, independentemente das experiências escolares passadas e do seu poder de comunicação verbal. Foram elaboradas em três diferentes séries, aplicáveis de acordo com a idade e designadas por: Colorid Progressive Matrices (CPM-PM47), Standard Progressive Matrices (SPM-PM38) e Advanced Progressive Matrices (APM-PM47). Cada série é constituída por diversos conjuntos de problemas apresentados segundo uma ordem deliberada. O score determinado a partir das matrizes de Raven é habitualmente designado por «factor geral de inteligência» ou, de uma forma abreviada, por «factor g». Não devem, no entanto ser consideradas como um teste completo de inteligência, como o próprio autor alerta (RAVEN, 1981).

Aos sujeitos da amostra foi aplicada a série de Matrizes Coloridas CPM-PM47. No Quadro C do Anexo I encontram-se os níveis de "factor g" obtidos. A série CPM-PM47 é constituída por três grupos de doze problemas, designados pelas letras A, Ab e B. Está classificada numa escala de 36 pontos. Foi concebida com a finalidade de medir com maior precisão os processos intelectuais de crianças, de deficientes e de pessoas idosas. A utilização da cor torna a realização do teste mais atractiva e facilita a compreensão da natureza dos problemas, reduzindo assim a necessidade de instruções verbais. Na figura 6.1 apresenta-se um exemplo de uma questão da série B, na qual se solicita o preenchimento do espaço em branco do rectângulo situado na parte superior da folha com uma das imagens numeradas de 1 a 6 que se encontram na parte inferior.

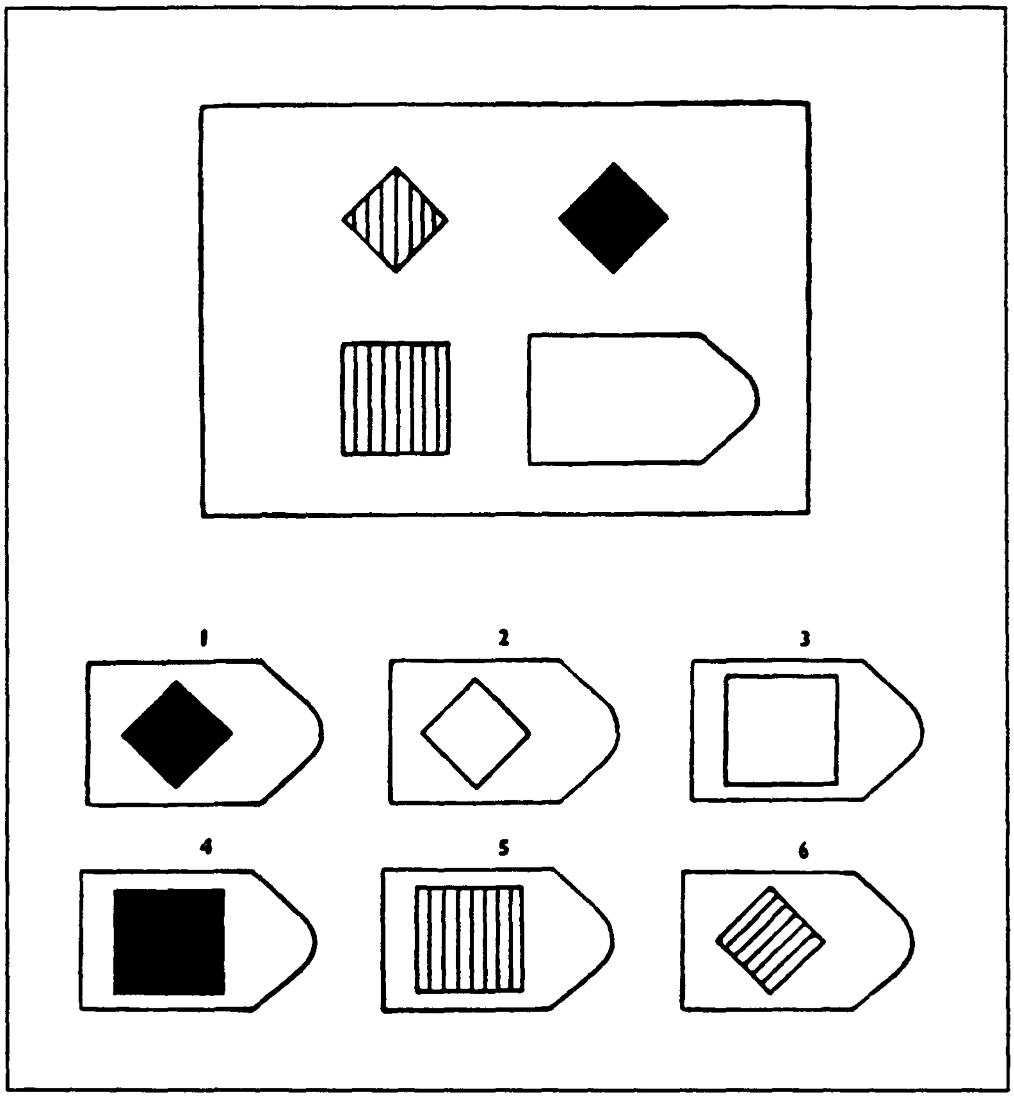


Figura 6.1 - Exemplo de uma questão da série B das matrizes coloridas CPM-PM47

O *factor geral* ou *inteligência geral* que as matrizes procuram determinar é um constructo que SPEARMAN (1923) começa por referir e que foi posteriormente retomado por muitos outros autores. O Prof. Leandro de ALMEIDA (1988, p. 25) define-o como a "capacidade de raciocínio geral ou capacidade de aprender e estabelecer relações", ou "capacidade de pensar ou trabalhar com símbolos abstractos", "capacidade de resolver novos problemas", ou ainda como "capacidade para adquirir e raciocinar com novos sistemas conceptuais".

A par do conceito de *inteligência*, ALMEIDA refere igualmente dois outros um pouco mais abrangentes: a *resolução de problemas* e o *pensamento / compreensão*. Quanto ao primeiro destes conceitos, o autor considera a sua crescente importância nos últimos tempos. Cita como possíveis causas para tal fenómeno o facto de nele se aliarem aspectos mais tipicamente intelectuais com outros mais claramente conotados com as aprendizagens e a experiência do indivíduo. Refere os trabalhos de GUILFORD (1967, p. 317) que inclui na *resolução de problemas* diversas dimensões intelectuais como a cognição, a avaliação, as produções divergente e convergente e a intuição. Numa linha cognitivista a *resolução de problemas* surge como uma aplicação da teoria do processamento da informação englobando capacidades de codificação, armazenamento e evocação da informação, avaliação, relacionamento e reestruturação da mesma informação, bem como escolha de estratégias.

No que respeita ao *pensamento / compreensão*, o mesmo autor define-o como "um processo de extracção de informação relevante a partir da descrição/apresentação de uma situação e tendo em vista a sua resolução" (ALMEIDA, 1988, p. 27).

Numa preocupação de averiguar da validade do teste de Raven para determinar o factor geral de inteligência, consultou-se BRODY (1985). Este autor considera que o referido instrumento nos fornece "uma boa medida de g" e compara-o com o teste de Peabody que considera pobre para o efeito (p. 382).

Como já referimos, um outro instrumento de recolha de dados utilizado nesta investigação foi o teste de avaliação da aprendizagem do final do 1º ano. Pode ser consultado no Anexo II. Consta de sete itens e está classificado numa escala de cem pontos. Os três primeiros itens são problemas. O quarto item é constituído por seis pequenas expressões numéricas envolvendo a adição e subtracção. O quinto item é uma identificação de círculos, o sexto uma seriação de quadrados e o sétimo um cálculo mental de somas envolvendo o operador "+ 5".

No Quadro I resumem-se algumas características do teste.

QUADRO I

Características do teste de avaliação da aprendizagem do final do 1º ano

Média	80,551
Desvio padrão	21,893
Erro padrão	1,568
Classificação máxima	100,000
Classificação mínima	0,000
Número de casos	196,000
Erro padrão de medição	11,000
Coeficiente Spearman-Brown (fidelidade)	0,832

O gráfico da Fig. 6.2 mostra-nos a distribuição das frequências das classificações globais no teste e o da Fig. 6.3 as percentagens de êxito em cada item.

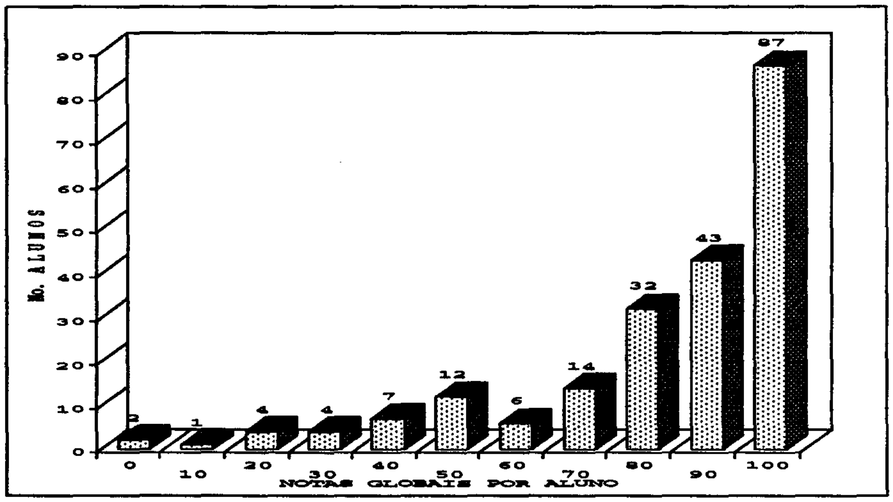


Figura 6.2 - Distribuição das frequências das classificações globais

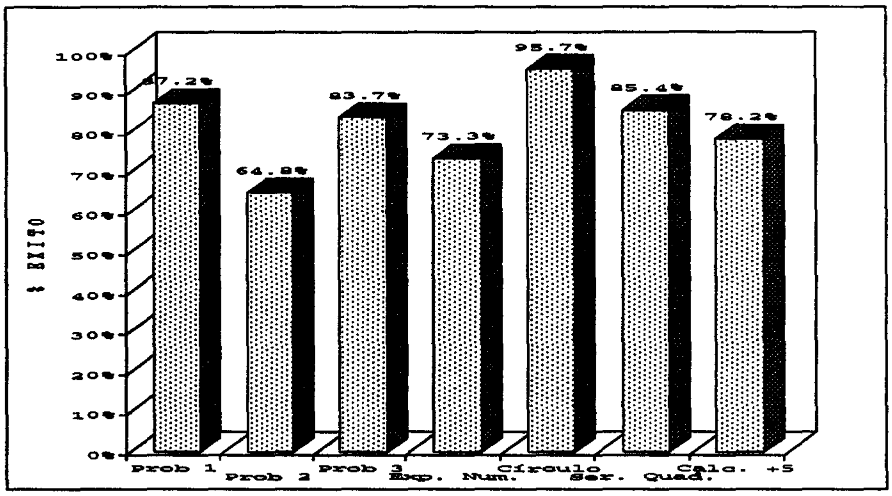


Figura 6.3 - Percentagem de êxito em cada item

Para determinar a fidelidade do teste calculou-se o coeficiente de Spearman-Brown, que se encontra igualmente registado no Quadro I. O seu valor é de 0,832.

No sentido de averiguar da sua validade foram consultados os restantes membros da equipa coordenadora (Grupo I) e, posteriormente, as professoras do Ensino Primário que integravam o Projecto «Ensinar é Investigar» (Grupo II). O teste foi considerado adequado não tendo sido feitas quaisquer sugestões de alteração.

Na tabela de contingência construida para estudar a 3ª Questão, para além dos problemas constantes do teste que acabámos de descrever, consideraram-se ainda os registos escritos dos processos de resolução dos problemas efectuados em outros quatro momentos de avaliação. Os enunciados desses problemas encontram-se no Anexo III. 9 problemas num total de 15 envolvem o raciocínio de uma só operação aritmética. Os restantes 6 envolvem duas operações ou mais.

6.3 PROCESSOS DE ANÁLISE DE DADOS

Para realizar este estudo optou-se por uma metodologia em que predominam as análises qualitativas. No entanto, para reforçar esse tipo de análise recorreu-se por vezes a cálculos de estatística descritiva, como médias, desvios e erros padrão e percentagens, ou de estatística inferencial, como é o caso da análise de variância e da razão "Z".

Na primeira questão de investigação, a qual expressava a preocupação em detectar a utilização regular de estratégias nos processos de resolução de problemas construídos pelas crianças, usou-se uma análise de conteúdo.

Procurou-se ainda averiguar da eficácia da utilização dos diversos tipos de estratégias encontrados, através do cálculo da razão de eficácia, do âmbito da estatística descritiva e ainda da razão "Z", do âmbito da estatística inferencial (GUILFORD e FRUCHTER, 1978, p. 159).

Na segunda questão de investigação, que procurava detectar uma possível relação entre as estratégias utilizadas e o nível de factor geral de inteligência, por um lado, e de competência matemática, por outro, usaram-se predominantemente análises de variância (ANOVA).

Para o efeito recorreu-se aos processos utilizados por cada criança em cada um dos três problemas estudados na 1ª questão, ao nível de factor g das Matrizes de Raven e à classificação de todo o teste de que os problemas são apenas uma parte[28].

No sentido de analisar a evolução dos processos de resolução de problemas ao longo dos quatro anos (terceira questão), construiu-se

[28] A classificação geral do teste deu-nos o nível de competência matemática.

uma tabela de contingência das estratégias usadas nos referidos processos. Para o efeito codificaram-se cerca de 3.000 casos de resolução de problemas correspondentes a 5 momentos de avaliação[29]. O código utilizado para os diversos tipos de estratégia foi semelhante ao da primeira questão.

Completou-se este trabalho com uma análise qualitativa da evolução dos processos de resolução de problemas, na qual se dá conta dos aspectos mais relevantes que foi possível detectar.

6.4 LIMITES DO ESTUDO

Algumas limitações se colocam à validação deste estudo.

A primeira reside no facto de se tratar da análise de uma experiência que já terminou, o que torna impossível o acesso às salas de aula e aos diferentes actores sociais envolvidos, nomeadamente alunos e professores.

Como segunda limitação podemos apontar a de não ter havido observação directa, por observadores não envolvidos na prática, do que se passava nas salas de aula, não só ao nível da aplicação do modelo de ensino/aprendizagem da Matemática como, mais especificamente , da forma como as crianças resolviam os problemas. A principal dificuldade que obstou a que tal acontecesse residiu no facto de as diversas turmas integradas no Projecto se encontrarem geograficamente dispersas pelo País.

Constitui ainda uma limitação a apontar o facto de não possuirmos qualquer registo, escrito ou oral, efectuado pelas próprias crianças, da utilização de estratégias de acção, o que se justifica pela

[29] Fevereiro e Junho do 1º ano e Maio/Junho de cada um dos três restantes anos.

sua idade e pelo momento de aprendizagem em que se encontravam. Foi, todavia, pedido às professoras que aplicaram os testes de avaliação para registarem a utilização do material de concretização, que, segundo as instruções dadas, as crianças deviam ser livres de praticar. Igualmente se pedia que evitassem o uso dos dedos com a mesma finalidade, mas se, apesar disso, ele existiu, há a possibilidade de não ter sido detectado e registado. Essa utilização, ainda que muito natural, é possível que não fosse muito frequente. Na verdade, aconselhavam-se todas as professoras integradas na experiência a estimularem o recurso a material de concretização. Procurava-se assim reduzir o hábito de utilizar os dedos com a mesma finalidade. No entanto, era aconselhado que se evitasse qualquer forma de repressão em relação a uma atitude tão espontânea como é a utilização do próprio corpo numa estratégia de acção.Por tudo isto parece possível esperar que, embora o número de estratégias de acção possa estar subavaliado, a diferença entre o número apontado e a realidade não deva ser provavelmente muito grande.

Uma outra limitação advém da maneira como a amostra deste estudo foi conseguida. A forma de selecção não foi aleatória, na medida em que os professores aderiram ao Projecto como voluntários. Este facto pode ter implicações na análise estatística que foi efectuada.

Finalmente a determinação do "factor geral" de inteligência fez--se por uma única aplicação das Matrizes Coloridas de Raven o que, por si só, não nos garante a sua exactidão. Para além disso, o próprio "factor g" obtido a partir das Matrizes de Raven, mesmo quando conseguido com maior precisão, não nos fornece uma visão completa da inteligência de um indivíduo, como já foi referido (RAVEN, 1981).

CONCLUSÃO

O que acaba de se descrever neste capítulo evidencia a utilização de uma metodologia de investigação múltipla, na qual tratamentos de tipo qualitativo, como é a análise de conteúdo, se completam com outros de cariz quantitativo, como seja o cálculo de médias e de taxas de eficácia, do domínio da estatística descritiva, ou análises de variância, do domínio da estatística inferencial.

Considerou-se ainda que os limites desta investigação lhe advêm fundamentalmente do facto de se tratar de um estudo baseado em dados recolhidos numa experiência já realizada.

CAPÍTULO 7

ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A primeira questão colocada no início deste estudo foi a de procurar detectar se os processos naturais construídos pelas crianças para resolverem problemas evidenciavam a utilização regular de algumas estratégias.

A questão afigurava-se pertinente uma vez que as estratégias utilizadas nos dão uma indicação da maior ou menor facilidade encontrada na resolução dos problemas, para além de nos poderem fornecer elementos sobre o nível de desenvolvimento cognitivo da criança que as utilizou.

7.1 ESTRATÉGIAS REGULARMENTE UTILIZADAS

Para detectar quais as estratégias pelas quais as crianças optam mais frequentemente usou-se uma análise de conteúdo.

Os critérios utilizados foram os seguintes:

- nos casos em que a professora de classe, assinalou o uso de material de concretização para a resolução do problema concluíu-se que fora utilizada uma *estratégias de acção* que designámos por **A**;
- sempre que a criança representou a situação através de um esquema ou desenho, designou-se por *icónica* a estratégia utilizada e representou-se pela letra **I**;

- quando a criança expressou o processo de resolução do problema através da linguagem simbólica matemática considerou-se que usou uma *estratégia simbólica* e designou-se por **S**.

Foi assim possível detectar a utilização regular de três diferentes tipos de estratégias.

1) A primeira tem por base a acção, nem sempre realizada directamente sobre os seres constantes da situação problemática (significados) mas sobre material de manipulação que os representam (significantes). Não se trata portanto simplesmente de uma acção no sentido mais genuíno da palavra, uma vez que envolve um certo grau de simbolismo. Apesar do que se acabou de referir, designámo-la por *estratégia de acção*. Um exemplo desta estratégia é o nº 1 do Anexo IV.

2) Uma segunda estratégia detectada é constituída pela representação dos seres e da própria acção através de desenhos ou esquemas, mais ou menos icónicos mais ou menos abstractos. Chamámos-lhe *estratégia iconográfica* ou simplesmente *icónica*. O nº 2 do Anexo IV é um dos muitos exemplos deste tipo de estratégia.

3) Num terceiro padrão regular de comportamento a acção é mental e a representação efectua-se através da linguagem simbólica matemática. Designámo-la por *estratégia simbólica*. O nº 17 do Anexo IV é um exemplo deste tipo de estratégia.

A terminologia adoptada manifesta claramente uma aproximação à teoria de BRUNER (1975), no que respeita aos estádios de representação do conhecimento: "inactive stage", "iconic stage" e "simbolic stage".

Relativamente à teoria de PIAGET, os dois primeiros tipos de estratégias inscrevem-se num nível pré-operatório, o último num nível operatório (PIAGET, 1971), uma vez que, para este autor, operações são acções mentais e só as estratégias de tipo simbólico emergem de um processo totalmente mental.

Algumas crianças resolveram cada um dos problemas através de uma só estratégia. Outras recorreram a várias num ou mais dos três problemas considerados.

Importa salientar que cada processo poderia ser constituído por uma só destas estratégias, isto é, a utilização de uma só estratégia permitiria à criança encontrar a solução do problema. Porque utilizará então duas ou mesmo três estratégias numa só situação problemática? Uma das explicações possíveis poderá residir no estímulo intencional dado às crianças pelo professor no sentido de resolverem o mesmo problema de várias maneiras, conforme o já referido no Capítulo 5 da PARTE II "Operacionalização do modelo".

Há crianças que usam, no teste que estamos a observar, a(s) mesma(s) estratégia(s) nas três situações problemáticas. Encontram-se neste caso cento e trinta e cinco dos duzentos e oito alunos considerados (64,9%). Outras há que variam de processo de problema para problema.

As estratégias de acção puderam ser detectadas, por se haver pedido às professoras que aplicaram o teste para as assinalarem, sempre que observassem a sua utilização, por parte de uma criança. A sua baixa frequência pode ser devida ao uso dos dedos da mão, mais difíceis de detectar do que o comum material de contagem. Apesar de ter sido dada a indicação de que se evitasse tal uso no teste, sugerindo-se, em substituição, o recurso a material manipulativo[30], pensamos

[30] Ver Anexo II

que o seu número estará subavaliado, conforme o já referido no Capítulo 6.

Talvez haja, no entanto, uma outra razão para essa baixa frequência: este tipo de estratégia seria anterior aos outros dois (PIAGET e INHELDER, 1979, BRUNER, 1975), tendendo a ser cada vez menos utilizado à medida que os outros vão sendo dominados. Tal parece ser o caso destas crianças no final do 1º ano de escolaridade. Só uma cuidada observação dos processos utilizados desde o início do ano nos permitiria responder a tal questão e os dados recolhidos não são, neste caso, suficientes.

7.2 EFICÁCIA DOS DIVERSOS TIPOS DE PROCESSO

Classificámos sete diferentes processos de resolução de problemas de acordo com as estratégias usadas pelas crianças.

O Quadro II dá-nos as ocorrências dos sete diferentes processos, bem como as respectivas percentagens de eficácia.

Designámos por "percentagem de eficácia" de um processo a razão entre o número de problemas correctamente resolvidos e o número total de problemas resolvidos por esse processo, expressa em percentagem.

QUADRO II

EFICACIA DE CADA UM DOS PROCESSOS UTILIZADOS POR 208 ALUNOS

Processos	1º Problema			2º Problema			3º Problema			Nos três problemas		
	Certos	Total	Eficácia	Certos	Total	Eficácia	Certos	Total	Eficácia	Certos	Total	Eficácia
Só Acção	3	3	100,0%	1	2	50,0%	2	2	100,0%	6	7	85,7%
Acção e Icónico	2	2	100,0%	0	1	0,0%	2	2	100,0%	4	5	80,0%
Acção e Simbólico	8	10	80,0%	4	10	40,0%	6	9	66,7%	18	29	62,1%
Três modelos	1	1	100,0%	1	2	50,0%	1	2	50,0%	3	5	60,0%
Só Icónico	13	18	72,2%	12	19	63,2%	24	32	75,0%	49	69	71,0%
Só Simbólico	96	106	90,6%	67	104	64,4%	63	77	81,8%	226	287	78,7%
Icónico e Simbólico	60	63	95,2%	49	64	76,6%	70	70	100,0%	179	197	90,9%
Não resolveram o problema	-	5	-	-	6	-	-	14	-	-	25	-
Total:	183	208	88,0%	134	208	64,4%	168	208	80,8%	485	624	77,7%

Revela-se como o mais eficaz aquele que envolve estratégias icónicas e simbólicas (90,9%). Seguem-se os constituídos apenas por uma estratégia de acção (85,7%) ou por esta e uma icónica (80,0%).

Os menos eficazes parecem ser os processos envolvendo estratégias de acção e simbólicas (62,1%) e os constituídos simultaneamente pelos três tipos de estratégias(60,0%). A explicação que ousamos avançar para esta falta de sucesso é a de que uma criança que recorre ainda a material manipulativo para representar a acção deve sentir alguma dificuldade em expressar o seu raciocínio através de uma expressão matemática. Importa, no entanto, frisar que os resultados referentes aos processos menos utilizados se revelam pouco seguros, exactamente devido às baixas frequências apresentadas.

Para averiguar se as diferenças verificadas entre as percentagens de eficácia dos três processos mais frequentes eram estatisticamente significativas recorreu-se ao cálculo da razão "Z" (GUILFORD e FRUCHTER, 1978, p. 159).

Para calcular a razão "Z" partiu-se da determinação das médias ponderadas entre as ocorrências bem sucedidas[31] de cada um dos processos segundo a fórmula:

$$p_e = \frac{N_1 p_1 + N_2 p_2}{N_1 + N_2}$$

na qual N_i p_i representa o número de vezes em que o processo "i" é utilizado com eficácia e N_i a ocorrência total do processo "i".

[31] Considerou-se "processo bem sucedido" aquele que permitiu atingir a solução verdadeira do problema.

"Z" foi determinado através da fórmula

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\bar{p}_e \, \bar{q}_e \left(\frac{N_1 + N_2}{N_1 \, N_2} \right)}}$$

na qual

p_i - percentagem de eficácia do processo "i"

$\bar{p}_e$ - média ponderada acima referida

$\bar{q}_e = 1 - \bar{p}_e$

N_i - ocorrência do processo "i"

O Quadro III informa-nos dos valores de "razão "Z" encontrados.

A hipótese nula correspondente poderia ser formulada nos seguintes termos:

Hipótese 1 (H1): não existe qualquer diferença entre a percentagem de eficácia do processo A e a percentagem de eficácia do processo B, podendo A e B tomar qualquer dos valores referidos no Quadro III.

QUADRO III

Diferenças entre percentagens de eficácia dos processos de resolução de problemas

Processos	Razão Z	P	
Icónico *versus* simbólico	Z = 1,379	P = 0,1800	(ns)
Icónico/Simbólico *versus* Icónico	Z = 3,247	P = 0,0012	(s)
Icónico/Simbólico *versus* Simbólico	Z = 3,543	P = 0,0004	(s)

(ns) - não significativo

(s) - significativo

A leitura do quadro permite-nos rejeitar a hipótese nula, quando A se refere ao processo que envolve simultaneamente estratégias iconográficas e simbólicas e B se refere, quer ao processo constituído apenas por uma estratégia icónica, quer ao processo constituído apenas por uma estratégias simbólica. Podemos, portanto, concluir que o primeiro dos processos citados manifesta uma percentagem de eficácia significativamente superior à dos outros dois. Quanto a estes dois últimos processos, não há evidência que nos permita afirmar que exista entre eles uma diferença de eficácia significativa.

Como resultado paralelo à presente investigação é de referir o maior grau de dificuldade sentido na resolução do 2º problema, cujo enunciado referia um dado superabundante (64,4% de percentagem de êxito). Não sendo uma constatação com interesse para o problema em estudo, vem no entanto confirmar resultados obtidos em anteriores investigações (BANA e NELSON, 1978; LESTER, 1978).

CONCLUSÃO

Ao procurar estudar os processos construídos pelas crianças para a resolução de problemas, foi possível detectar o uso regular de três diferentes tipos de estratégias. Devido à forma de representação do conhecimento a que fazem apelo, designaram-se por "estratégias de acção", "estratégias icónicas" e "estratégias simbólicas", numa clara alusão aos estádios de desenvolvimento da teoria de Bruner. Considerou-se ainda que os dois primeiros tipos de estratégias correspondem, na teoria de PIAGET, a um nível pré-operatório, enquanto que o último tipo corresponde a um nível operatório.

Por serem muito simples os problemas que serviram de base a este estudo, uma vez que se destinavam a alunos do 1º ano, o processo de resolução de cada problema poderia fazer apelo a uma só estratégia.

No entanto, muitas crianças optaram pelo recurso simultâneo a duas e mesmo três estratégias num só problema. De todos esses processos, o que parece ter sido utilizado com maior êxito foi o que conjugou uma estratégia de tipo icónico com uma de tipo simbólico. Foi mesmo possível determinar que este tipo de processo apresenta uma taxa de eficácia significativamente superior aos processos constituídos apenas por uma estratégia icónica ou por uma estratégia simbólica.

CAPÍTULO 8

COMPARAÇÃO DOS PROCESSOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM OS NÍVEIS DE FACTOR G DE INTELIGÊNCIA E DE COMPETÊNCIA MATEMÁTICA

A segunda questão de investigação deste estudo expressa a preocupação em averiguar a possível existência de uma relação entre os processos de resolução de problemas utilizados por cada criança e o seu nível de factor geral de inteligência e de competência matemática.

Neste capítulo relata-se o tratamento de dados efectuado para procurar determinar da existência ou não dessas relações e as conclusões a que chegámos.

8.1 DETERMINAÇÃO DA MÉDIA DE FACTOR g E DA MÉDIA DA CLASSIFICAÇÃO NO TESTE DE MATEMÁTICA DOS GRUPOS DE CRIANÇAS QUE UTILIZARAM CADA UM DOS PROCESSOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

Ao procurar detectar uma possível existência de relação entre os processos de resolução de problemas utilizados por cada criança e o nível por ela obtido quando efectuou as Matrizes Coloridas de Raven, começámos por fazer uma análise problema a problema. Os Quadros IV, V e VI dão-nos, para cada uma das situações problemáticas, a frequência dos diversos processos e a respectiva média do factor g, para além do desvio padrão e do erro padrão.

QUADRO IV
Factor g dos alunos que utilizaram cada um dos processos
Problema 1
(N = 207)

Processos	Frequência	Média Factor g	Desvio Padrão	Erro Padrão
E. Acção	3	14,000	1,732	1,000
E. Icónica	19	16,895	4,012	0,921
E. Simbólica	109	18,358	4,764	0,456
E. Acção/E. Icónica	2	15,000	4,243	3,000
E. Acção/E. Simbólica	10	16,200	4,050	1,281
E. Icónica/E. Simbólica	63	18,206	4,458	0,562
Três Estratégias	1	12,000		

QUADRO V
Factor g dos alunos que utilizaram cada um dos processos
Problema 2
(N = 206)

Processos	Frequência	Média Factor g	Desvio Padrão	Erro Padrão
E. Acção	2	14,500	2,121	1,500
E. Icónica	19	16,421	3,892	0,893
E. Simbólica	105	18,629	4,683	0,457
E. Acção/E. Icónica	1	12,000		
E. Acção/E. Simbólica	10	16,200	4,050	1,281
E. Icónica/E. Simbólica	67	17,925	4,457	0,557
Três Estratégias	2	15,000	4,243	3,000

QUADRO VI

Factor g dos alunos que utilizaram cada um dos processos

Problema 3

(N = 198)

Processos	Frequência	Média Factor g	Desvio Padrão	Erro Padrão
E. Acção	2	14,500	2,121	1,500
E. Icónica	34	17,029	4,366	0,749
E. Simbólica	79	19,304	4,667	0,525
E. Acção/E. Icónica	2	15,000	4,243	3,000
E. Acção/E. Simbólica	9	16,222	4,295	1,432
E. Icónica/E. Simbólica	70	17,471	4,468	0,534
Três Estratégias	2	14,000	2,828	2,000

Uma primeira leitura destes três quadros parece realçar que as crianças que obtiveram maior êxito na realização das matrizes têm tendência a escolher processos constituídos apenas por uma estratégia simbólica, seguidas das que recorrem a uma conjugação desta com uma estratégia iconográfica. Os alunos de factor g mais baixo parecem preferir processos envolvendo uma estratégia de acção.

Não nos foi possível verificar se as diferenças se revelam estatisticamente significativas através de uma análise de variância (ANOVA) uma vez que os tamanhos dos grupos eram muito diferentes (KEPPEL, 1982, p. 86).

Adiante se refere qual a opção que fizémos para ultrapassar essa dificuldade.

No sentido de analisar a relação entre os processos escolhidos para a resolução de problemas e o nível de competência matemática de cada criança, utilizámos a classificação geral do teste a que os problemas pertencem.

Os Quadros VII, VIII e IX permitem-nos comparar os processos de resolução de problemas com as médias das classificações gerais.

QUADRO VII

Classificação no teste de Matemática dos alunos que utilizaram cada um dos processos no problema 1

(N = 207)

Processos	Frequência	Média Classificação	Desvio Padrão	Erro Padrão
E. Acção	3	46,000	30,610	17,673
E. Icónica	19	74,053	24,800	5,690
E. Simbólica	109	82,890	19,354	1,854
E. Acção/E. Icónica	2	71,000	14,162	10,000
E. Acção/E. Simbólica	10	69,400	16,345	5,169
E. Icónica/E. Simbólica	63	85,508	14,639	1,844
Três Estratégias	1	66,000		

QUADRO VIII

Classificação no teste de Matemática dos alunos que utilizaram cada um dos processos no problema 2

(N = 206)

Processos	Frequência	Média Classificação	Desvio Padrão	Erro Padrão
E. Acção	2	60,500	24,749	17,500
E. Icónica	19	69,105	25,267	5,797
E. Simbólica	105	82,800	19,661	1,919
E. Acção/E. Icónica	1	61,000		
E. Acção/E. Simbólica	10	69,400	16,345	5,169
E. Icónica/E. Simbólica	67	86,896	12,520	1,530
Três Estratégias	2	73,500	10,607	7,500

QUADRO IX

Classificação no teste de Matemática dos alunos que utilizaram cada um dos processos no problema 3

(N = 198)

Processos	Frequência	Média Classificação	Desvio Padrão	Erro Padrão
E. Acção	2	60,500	24,749	17,500
E. Icónica	34	72,000	25,187	4,319
E. Simbólica	79	83,063	19,340	2,176
E. Acção/E. Icónica	2	71,000	14,142	10,000
E. Acção/E. Simbólica	9	68,222	16,880	5,627
E. Icónica/E. Simbólica	70	88,371	9,652	1,154
Três Estratégias	2	73,000	9,899	7,000

A observação destes quadros parece revelar uma supremacia, em termos de resultados gerais, do grupo de alunos que combina, na resolução de problemas, uma estratégia iconográfica com uma estratégia simbólica. Seguem-se-lhes os alunos que optam por utilizar apenas o modelo simbólico. Os alunos com piores resultados no teste são, em qualquer dos três problemas, os que utilizam apenas uma estratégia de acção. É interessante notar que, como atrás ficou referido, estas crianças revelam um bom nível de eficácia na resolução de problemas. Este facto poderá significar que as estratégias de acção permitem que mesmo os alunos com mais dificuldades resolvam os problemas com êxito.

Os quadros referem ainda valores de desvio padrão relativamente elevados, revelando alguma heterogeneidade de classificações. Quanto ao erro padrão, ele mantém-se em valores baixos nos grupos mais numerosos, sendo bastante elevado nos que apresentam um tamanho muito reduzido.

Os Quadros XI e XIII confirmam os baixos valores do erro padrão nos grupos mais representativos.

Não foi igualmente possível verificar se as diferenças entre médias de classificação dos diversos grupos se revelam estatisticamente significativas porque nos deparámos com grupos de tamanhos excessivamente dispares, como já havia acontecido quando tentámos relacionar o tipo de processos utilizados com o nível de "factor g".

8.2 DETERMINAÇÃO DO NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA DAS DIFERENÇAS DE FACTOR g E DE COMPETÊNCIA MATEMÁTICA DOS GRUPOS DE CRIANÇAS QUE UTILIZARAM CADA UM DOS PROCESSOS DE RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS.

No sentido de determinar se as diferenças encontradas entre as médias de factor g e da classificação do teste de Matemática dos grupos de crianças que utilizaram cada um dos processos de resolução de problemas eram significativas, fizémos duas opções que nos permitiram proceder a uma análise de variância (ANOVA). A primeira foi a de considerar apenas os alunos que haviam utilizado o mesmo processo nos três problemas. Recorde-se aqui que encontrámos crianças que optaram sempre pelo mesmo processo para resolverem os três problemas, enquanto outras variaram de processo de problema para problema. Com os alunos do primeiro tipo mencionado formámos grupos que designámos por:

GA O grupo de crianças que utilizaram nos três problemas um processo que incluía apenas estratégias de acção

GI O grupo de crianças que utilizaram nos três problemas um processo que incluía apenas estratégias iconográficas

GS O grupo de crianças que utilizaram nos três problemas um processo que incluía apenas estratégias simbólicas

GAI O grupo de crianças que utilizaram nos três problemas um processo que incluía estratégias de acção e iconográficas

GAS O grupo de crianças que utilizaram nos três problemas um processo que incluía estratégias de acção e simbólicas

GIS O grupo de crianças que utilizaram nos três problemas um processo que incluía estratégias iconográficas e simbólicas

GAIS O grupo de crianças que utilizaram nos três problemas um processo que incluía os três tipos de estratégias

A outra opção que fizémos foi a de não considerar os grupos que tinham utilizado um processo envolvendo uma estratégia de acção[32] uma vez que os seus tamanhos eram muito baixos e, por essa razão, extremamente diferentes dos três restantes[33].

O software utilizado foi o STATVIEW II.

As duas opções que acabámos de mencionar[34] reduziram o número de sujeitos a 132. Em tratamento posterior são de novo recuperados os alunos que variam de processo.

Na aplicação do ANOVA para determinar a relação existente entre os processos de resolução de problemas e o nível de competência matemática, no caso de ela existir, deparámo-nos com uma nova dificuldade: a classificação geral do teste que nós utilizámos, tinha uma distribuição em J, portanto claramente não normal. Este facto parece, no entanto, não levantar qualquer problema à utilização deste tipo de tratamento estatístico (KEPPEL, 1982, p. 86). De facto, NORTON[35] conduziu estudos com amostras de distribuições normal, rectangular, moderada e fortemente enviesadas, em I e em J e concluiu que existia uma estreita correspondência entre as percentagens empírica e teórica. A mesma constatação se verificou no que respeita à homogeneidade da variância do erro, classicamente considerado como condição para a aplicação do teste F. Coloca apenas como restrição a necessidade de as várias sub-amostras que se pretende comparar

[32] Grupos GA, GAI, GAS e GAIS.

[33] Grupos GI, GS e GIS.

[34] Utilizar apenas os alunos que optam pelo mesmo processo nos três problemas e eliminar os que utilizam uma estratégia de acção.

[35] Citado por KEPPEL, 1982

terem a mesma forma de distribuição das frequências, facto que é verificado no presente estudo - figuras 8.1 e 8.2[36].

As hipóteses nulas correspondentes à Questão 2 do problema em estudo foram assim formuladas:

Hipótese 2 (H2): não existe diferença entre os níveis de eficiência nos testes de factor geral de inteligência (matrizes de Raven) dos sujeitos que utilizaram cada um dos processos de resolução de problemas estudados (**GI**, **GS** e **GIS**)

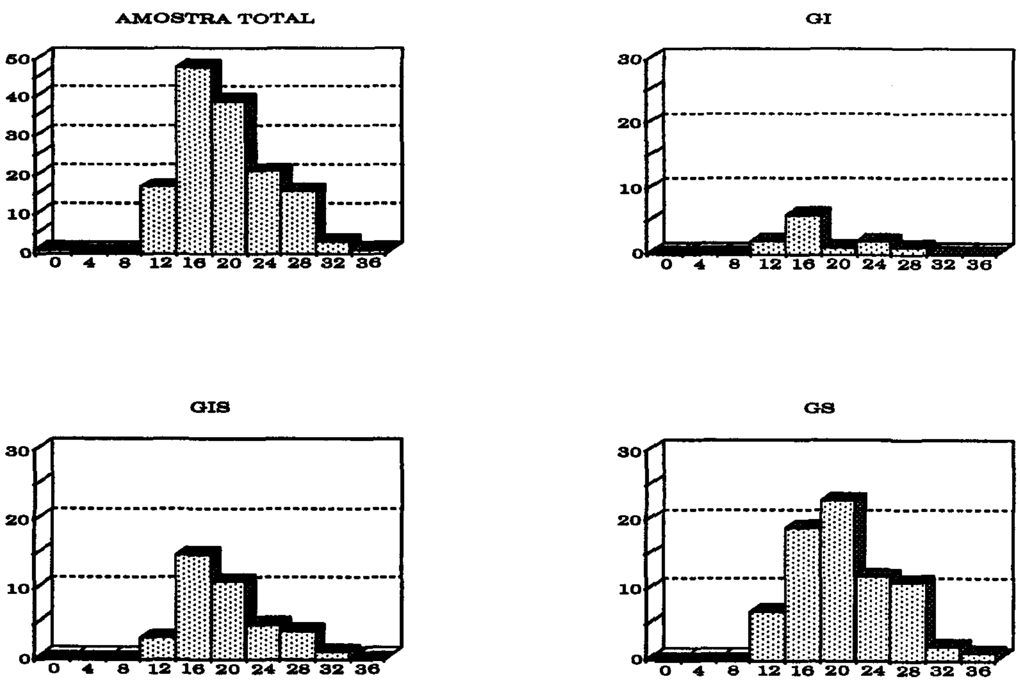


Figura 8.1 - Distribuição de frequências de níveis de factor "g"

[36] A curva de distribuição de frequências da classificação do teste de Matemática do grupo GI, não sendo uma distribuição em J, apresenta uma forma relativamente próxima.

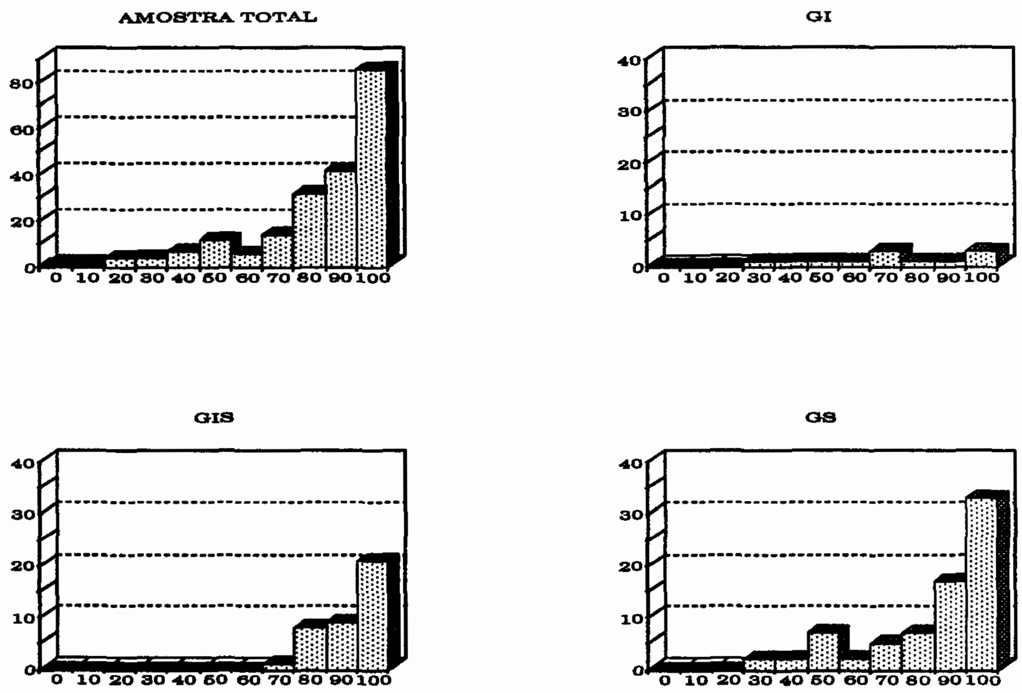


Figura 8.2 - Distribuição de frequências das classificações no teste de Matemática do final do 1º ano

Hipótese 3 (H3): não existe diferença entre os níveis de competência matemática, definida pela classificação geral do teste de avaliação do final do 1º ano de escolaridade, dos sujeitos que utilizaram cada um dos processos de resolução de problemas estudados (**GI**, **GS** e **GIS**).

O Quadro X resume os resultados obtidos com a análise de variância que permitiu relacionar o processo utilizado nos problemas e o nível de factor g.

QUADRO X

Diferenças entre o factor g dos alunos que utilizaram cada um dos processos nos três problemas

Análise de variância

(ANOVA - um factor)

X_1: Processo de Resolução de Problemas
Y_1: factor g

	Graus de Liberdade	Quadrado da Soma	Quadrado da Média	F-test
Entre grupos	2	90,0	45,0	1,9
Dentro dos grupos	123	2.867,2	23,3	p=0,1495
Total:	125	2.957,2		

Estimativa Modelo II da variância entre componentes = 54,9

Grupo	Tamanho do Grupo	Média	Desvio Padrão	Erro Padrão
GS	75	19,2	5,0	0,6
GIS	39	18,2	4,7	0,7
GI	12	16,5	4,4	1,3

Como se pode verificar, não existe evidência que nos permita reconhecer a existência de uma relação entre o processo de resolução de problemas utilizado por cada criança e o seu nível de factor geral de inteligência.

No que se refere à análise de variância efectuada no sentido de relacionar o processo de resolução de problemas e o nível de competência matemática, podemos encontrar no Quadro XI um resumo dos resultados obtidos.

QUADRO XI

Diferenças entre as classificações globais do teste de Matemática dos alunos que utilizaram cada um dos processos nos três problemas Análise de variância

(ANOVA - um factor)

X_1: Processo de Resolução de Problemas
Y_1: factor g

	Graus de Liberdade	Quadrado da soma	Quadrado da média	F-teste
Entre grupos	2	4.416,3	2.208,1	6,5
Dentro dos grupos	123	41.509,9	337;5	p=0,002
Total:	125	45,926,1		

Estimativa Modelo II da variância entre componentes = 54,9

Grupo	Tamanho do Grupo	Média	Desvio Padrão	Erro Padrão
GS	75	81,8	20,5	2,4
GIS	39	89,1	10,2	1,6
GI	12	67,6	24,5	7,1

Comparação	Diferença entre médias	Fisher PLSD
GS *versus* GIS	-7,3	7,2*
GS *versus* GI	14,2	11,3*
GIS *versus* GI	21,5	12,0*

* Significante a 95%

Considerando como aceitável uma probabilidade de erro de 0,2%, podemos rejeitar H3 e portanto afirmar que existe uma diferença estatisticamente significativa entre os níveis de realização matemática das crianças pertencentes a cada um dos grupos designados por **GI**, **GS** e **GIS** ($p = 0,002$). As diferenças revelam-se igualmente significativas entre os grupos tomados dois a dois, com uma probabilidade de erro de 5%.

Aceitando as probabilidades de erro acima referidas, podemos portanto afirmar que:

a) os alunos que, no referido teste, obtiveram melhor classificação em Matemática[37] optaram por resolver os problemas através de um processo que inclui a utilização simultânea de estratégias icónicas e simbólicas (**GIS**);

b) os alunos com classificação no teste de Matemática um pouco menos boa[38] optaram pela utilização de um processo que inclui apenas estratégias simbólicas (**GS**)

c) os alunos menos bem classificados[39] utilizaram apenas estratégias icónicas (**GI**).

Com a preocupação de recuperar os alunos que não haviam resolvido os três problemas pelo mesmo processo, criámos um novo grupo formado por essas crianças. Designámo-lo por "**GV**".

Verificaram-se as curvas de distribuição das frequências relativas ao factor g e à classificação em Matemática. As curvas apresentavam formas semelhantes às correspondentes da amostra total e dos outros grupos, pelo que se considerou válida a utilização do ANOVA[40].

---

[37] Classificação média: 89.1

[38] Classificação média: 81.8

[39] Classificação média: 67.6

[40] Para maior esclarecimento ver o que, a propósito, se refere na página 110 da tese.

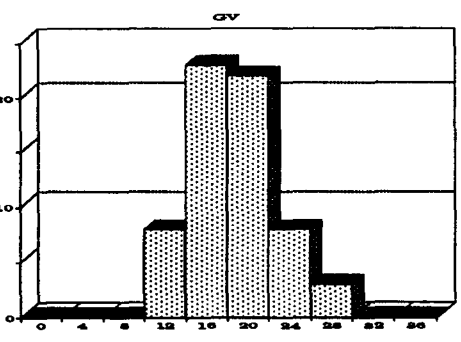


Figura 8.3 - Distribuição de frequências dos níveis de factor g

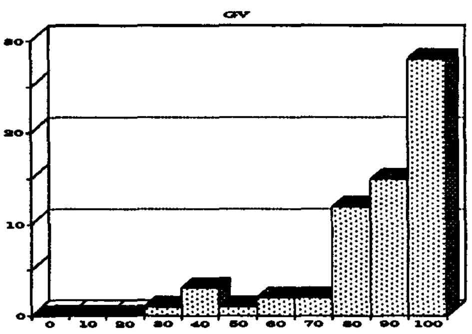


Figura 8.4 - Distribuição de frequências das classificações no teste de Matemática do final do 1º ano

As hipóteses nulas correspondentes podem ser assim formuladas:

Hipótese 4 (H4): não existe diferença ente os níveis de "factor g" das Matrizes de Raven dos sujeitos que utilizam cada um dos processos de resolução de problemas (**GI**, **GS**, **GIS**) nos três problemas considerados ou que variam de processo de problema para problema (**GV**).

Hipótese 5 (H5): não existe diferença entre os níveis de competência matemática, fornecida pela classificação geral do teste do final do 1º ano, dos sujeitos que utilizam cada um dos processos de resolução de problemas (**GI**, **GS**, **GIS**) nos três problemas considerados ou que variam de processo de problema para problema (**GV**).

Os resultados da análise de variância sobre os quatro grupos - **GI**, **GS**, **GIS** e **GV** - encontram-se nos Quadros XII e XIII.

QUADRO XII
Diferenças entre o factor g dos alunos que utilizaram cada um dos processos nos três problemas ou que variaram de processo de problema para problema Análise de variância

(ANOVA - um factor)

X_1: Processo de Resolução de Problemas
Y_1: factor g

	Graus de Liberdade	Quadrado da soma	Quadrado da média	F-teste
Entre grupos	2	192,846	64.282	3,157
Dentro dos grupos	123	3.787,833	20.365	p=0,026
Total:	125	3.980,679		

Estimativa Modelo II da variância entre componentes = 1,013

Grupo	Tamanho do Grupo	Média	Desvio Padrão	Erro Padrão
GS	75	19,227	4,980	0,575
GV	64	17,078	3,823	0,478
GIS	39	18,154	4,654	0,745
GI	12	16,500	4,359	1,258

Comparação	Diferença entre médias	Fisher PLSD
GS versus GV	2,149	1,515*
GS versus GIS	1,073	1,758
GS versus GI	2,727	2,768
GV versus GIS	-1,076	1,809
GV versus GI	0,578	2,801
GIS versus GI	1,654	2,939

* Significante a 95%

QUADRO XIII
Diferenças entre as classificações globais do teste de Matemática dos alunos que utilizaram cada um dos processos nos três problemas ou variaram de processo de problema para problema
Análise de variância

(ANOVA - um factor)

X_1: Processo de Resolução de Problemas
Y_1: factor g

	Graus de Liberdade	Quadrado da soma	Quadrado da média	F-teste
Entre grupos	3	4.418,080	1.472.693	4,441
Dentro dos grupos	186	61.685,862	331.664	p=0,0049
Total:	189	66.103,942		

Estimativa Modelo II da variância entre componentes = 26,317

Grupo	Tamanho do Grupo	Média	Desvio Padrão	Erro Padrão
GS	75	81,787	20,641	2,363
GV	64	82,500	17,896	2,237
GIS	39	89,128	10,157	1,626
GI	12	67,583	24,511	7,076

Comparação	Diferença entre médias	Fisher PLSD
GS *versus* GV	-0,713	6,114
GS *versus* GIS	-7,342	7,093*
GS *versus* GI	14,203	11,171*
GV *versus* GIS	-6,628	7,299
GV *versus* GI	14,917	11,303*
GIS *versus* GI	21,545	11,861*

* Significante a 95%

O Quadro XII mostra a existência de uma relação entre o nível de factor g e o tipo de processo utilizado na resolução de problemas (p = 0,026), permitindo rejeitar a hipótese nula H4, mas a análise da relação entre grupos tomados dois a dois revela que só o conjunto dos alunos que utilizaram sempre uma estratégia simbólica (**GS**) possuem uma média de nível de factor g significativamente superior à do grupo dos alunos que variaram de processo nos três problemas (**GV**), diferença significativa a 95%.

O Quadro XIII revela a existência de uma relação entre o nível de competência matemática e o tipo de processo utilizado na resolução de problemas (p = 0,0049), pelo que é igualmente possível rejeitar a hipótese nula H5. Confirmam-se assim os resultados do tratamento estatístico anteriormente realizado. No entanto a comparação dos grupos dois a dois nem sempre se revela significativa. Aos pares de grupos que no tratamento anterior já manifestavam diferenças significativas só é possível acrescentar **GV** *versus* **GI**, o que nos possibilita afirmar que as crianças que não utilizaram o mesmo tipo de processo de resolução nos três problemas são melhores alunos que os que utilizam sempre estratégias icónicas.

A constatação mais interessante que ressalta da comparação entre resultados expressos nos dois quadros parece-nos ser a de que os alunos que utilizaram diferentes processos de resolução nos três problemas obtiveram tão bons resultados como os que utilizaram sempre estratégias simbólicas, apesar de terem obtido um menor nível de eficiência nos testes de factor geral de inteligência (Matrizes de Raven) do que estes últimos.

O recurso a mais de uma estratégia, quer no mesmo problema, quer de problema para problema, parece assim colocar os alunos que as utilizam em vantagem, relativamente aos outros.

CONCLUSÃO

No capítulo 8 refere-se a forma como, utilizando análises de variância ANOVA, procurámos detectar possíveis relações entre os processos de resolução de problemas construídos por uma criança e o nível de factor geral de inteligência e ainda o seu nível de competência matemática (2ª questão de investigação). A análise incidiu sobre os registos escritos da forma como os sujeitos da amostra resolveram os três problemas do teste final do 1º ano. Tratou-se portanto, de um estudo horizontal, sincrónico.

Ao comparar os processos de resolução de problemas com o nível de competência matemática, foi possível encontrar algumas relações estatisticamente significativas. Assim, verificou-se que alguns alunos mais bem classificados[41] optaram por resolver os três problemas por um processo em que incluíam a utilização simultânea de estratégias icónicas e simbólicas, enquanto que os menos bem classificados[42] recorreram apenas a estratégias icónicas. Os alunos médios preferiram, de uma forma geral, os processos constituídos apenas por estratégias simbólicas[43] ou variaram de processo de problema para problema[44].

No que respeita ao nível de factor geral de inteligência obtido através das matrizes de Raven, não foi possível, de uma forma geral, encontrar uma relação significativa com os processos de resolução dos problemas. A única excepção foi detectada ao relacionar o grupo de crianças que utilizam processos diferentes para resolverem os três problemas e o das que optam sempre por estratégias simbólicas. As primeiras possuem, em média, um nível significativamente mais baixo de factor g, embora tenham obtido classificações idênticas às do segundo grupo no teste de Matemática.

---

[41] Classificação média de 89,1

[42] Classificação média de 67,6

[43] Classificação média de 81,8

[44] Classificação média de 82,5

CAPÍTULO 9

EVOLUÇÃO DOS PROCESSOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS AO LONGO DE QUATRO ANOS

No sentido de responder à 3ª Questão de investigação, efectuou-se um estudo longitudinal da evolução dos processos de resolução de problemas ao longo dos quatro anos de escolaridade primária - 1º Ciclo do Ensino Básico.

Neste Capítulo descreve-se a forma como se realizou essa análise através da construção de uma tabela de contingência. Esse trabalho foi enriquecido com uma descrição de alguns aspectos qualitativos dessa evolução que puderam ser observados nos registos das crianças e que se consideraram interessantes.

9.1 ANÁLISE QUANTITATIVA DA EVOLUÇÃO DAS OCORRÊNCIAS DOS DIVERSOS TIPOS DE ESTRATÉGIA

Com a finalidade de estudar a evolução dos vários tipos de estratégias regularmente utilizados pelas crianças para a resolução de problemas, considerámos os processos que elas criaram para resolver os problemas do primeiro teste do 1º ano e dos testes finais dos quatro anos.

Começámos por estabelecer um código para cada uma das estratégias mais frequentemente utilizadas pelas crianças.

Designámos por:

A uma estratégia de acção, como já anteriormente havíamos feito;

I a representação icónica, mais ou menos abstracta, dos elementos constantes do problema e da acção

S1 a utilização de expressões numéricas aditivas e/ou subtractivas mesmo em situações multiplicativas ou de divisão;

S2 a utilização de expressões numéricas multiplicativas e/ou de divisão, podendo integrar mais do que uma operação e o uso de parênteses, sempre com a correcta utilização do sinal de "=".

Codificámos então cerca de 3000 processos de resolução de problemas correspondentes a aproximadamente 200 crianças resolvendo 3 problemas em cada um dos 5 momentos de avaliação escolhidos.

Quantificámos o número de vezes que cada uma dessas estratégias foi utilizada e construímos uma tabela de contingência com as frequências - Quadro XIV - e um gráfico que nos permite visualizar melhor a evolução - Fig. 9.1.

QUADRO XIV
Evolução da ocorrência dos diversos tipos de estratégias ao longo dos quatro anos

(em %)

	1º Aa	1º Ab	2º A	3º A	4º A
A	7,47	3,17	0,00	0,00	0,00
I	43,70	33,33	12,64	5,02	0,00
S1	48,83	59,22	49,76	10,81	1,23
S2	0,00	4,27	37,60	84,17	98,77

(em valor absoluto)

	1º Aa	1º Ab	2º A	3º A	4º A
A	67	26	0	0	0
I	392	273	79	26	0
S1	438	485	311	56	6
S2	0	35	235	436	483

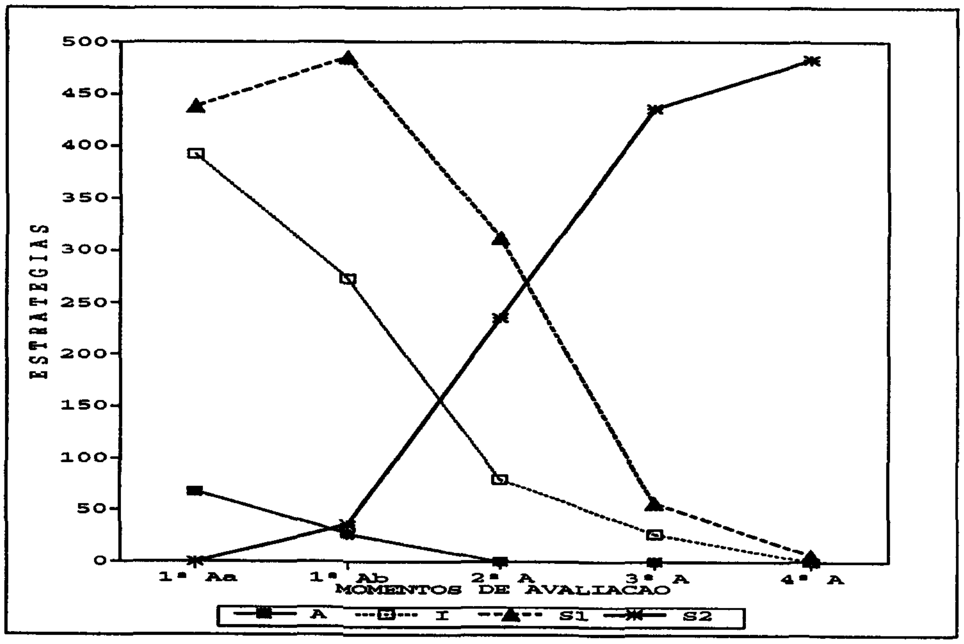


Figura 9.1 - Evolução da ocorrência dos diversos tipos de estratégias ao longo dos quatro anos

Apesar de se nos afigurar que a evolução das estratégias ressalta com grande clareza da leitura quer do quadro quer do gráfico, preocupámo-nos em averiguar se a distribuição das frequências poderia ser devida ao acaso. Formulámos a seguinte hipótese:

Hipótese 6 (H6): A distribuição das frequências dos quatro tipos de estratégias, designadas por **A**, **I**, **S1** e **S2**, ao longo dos cinco momentos de avaliação considerados, pode ser devida ao acaso.

Calculámos o χ^2. O seu valor é de 2392,61 para $p<0,0001$, o que nos permite rejeitar a hipótese nula. Concluímos assim que, para $p<0,0001$, a ocorrência das diversas estratégias ao longo dos quatro anos de escolaridade não pode ser considerada como devida ao acaso.

Analisando o Quadro XIV e o Gráfico da Fig. 9.1 verificamos que:

- existe uma zona inicial de partilha entre as estratégias de acção (**A**), as icónicas (**I**) e as simbólicas simples (**S1**) correspondentes aos dois primeiros momentos de avaliação (1º Ano);
- as estratégias simbólicas mais elaboradas (**S2**), de que não temos notícia no primeiro teste, começam a surgir no final desse ano; a sua frequência vai sempre aumentando, enquanto a dos outros três tipos de estratégias vai diminuindo; a zona de inversão situa-se no 2º Ano;
- as estratégias de acção só surgem nos dois primeiros anos, desaparecendo por completo nos anos subsquentes;
- no 4º Ano todos os problemas são resolvidos através de estratégias simbólicas, apresentando as menos formais (**S1**) uma fraca expressão.

9.2 ANÁLISE QUALITATIVA DA EVOLUÇÃO DOS PROCESSOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Preocupámo-nos também em efectuar uma análise qualitativa dessa evolução. Para o efeito não nos restringimos aos cinco momentos de avaliação que serviram de base ao estudo quatitativo relatado em 9.1, tendo utilizado trabalhos efectuados pelas crianças em qualquer uma das onze avaliações realizadas. Encontrámos alguns factos interessantes que passamos a relatar. Reunimos no Anexo IV os exemplos que ilustram o que descrevemos.

As estratégias de acção são, como já antevíamos, as primeiras formas de resolução de problemas a surgirem. Delas temos notícias pelos relatos escritos das professoras que aplicaram o modelo de ensino/aprendizagem nas suas salas de aula. No Anexo IV o exemplo 1 é o registo escrito de um problema resolvido através deste tipo de estratégia. Trata-se de uma criança que revela algumas dificuldades, nomeadamente a nível da contagem e da representação numérica. Apesar disso consegue resolver correctamente um problema que envolve duas operações.

Sendo o primeiro tipo de estratégia a aparecer, é também o primeiro a ser abandonado.

Uma outra forma de resolução de problemas é a que utiliza a representação da acção, já não através de objectos, como no caso anterior, mas através de desenhos. São as estratégias de tipo iconográfico.

O exemplo 2 ilustra a utilização deste tipo de estratégia na resolução dos problemas do teste do Anexo II - 1º ano de escolaridade. Os exemplos 3, 4 e 5, manifestam a passagem da elaboração de desenhos com um elevado grau de iconicidade para outros muito mais simplificados, mas que se revelam tão úteis como os anteriores. No exemplo 6, de novo referente aos problemas do teste do Anexo II, as representações são bastante abstractas. No exemplo 7 a criança utiliza os esquemas sobre uma recta numérica graduada, para além de estratégias simbólicas.

Tentemos agora perceber como surge este último tipo de estratégias.

PIAGET, ao referir a génese do conhecimento, advoga que a construção de novos esquemas se processa a partir de outros já existentes, por processos de assimilação e acomodação. Refere ainda que as operações concretas, a cuja classe pertencem as operações aritméticas que ocorrem nestes problemas, são interiorizações de acções realmente praticadas. No entanto, a ligação no mesmo problema de estratégias de acção e simbólicas aparece como pouco frequente no final do primeiro ano[45]. Além disso e, segundo nos parece, com maior significado, é o facto de a utilização conjunta destes dois tipos de estratégias se revelar como pouco eficaz: 62,1%[46]. Curiosamente o Quadro II realça a elevada frequência da utilização conjunta de estratégias icónicas e simbólicas[47] e a sua elevada taxa de eficácia (90,9%). Qual a razão de tais factos? Uma possível interpretação para a vantagem das icónicas sobre as de acção concreta na construção das estratégias simbólicas poderá residir no facto de a interiorização da acção se efectuar gradualmente, e as estratégias do tipo icónico revelarem acções parcialmente interiorizadas, mais próximas assim das simbólicas, logo mais capazes de as gerarem. Este facto poderá ainda reforçar a já citada teoria de BRUNER (1975) que coloca entre o estádios da representação pela acção e o da representação simbólica um estádio intermédio de representação icónica. Uma leitura cuidada da tabela de contingência[48] e do gráfico correspondente[49] parece apontar nesse sentido, permitindo-nos colocar a hipótese de que as estratégias icónicas sucedem normalmente a estratégias de acção e precedem as simbólicas, hipótese que foi reforçada por observações efectuadas na sala aula. Por outro lado, ao analisarmos os registos escritos das crianças podemos verificar que, quando utilizam no mesmo problema estratégias icónicas e simbólicas, a representação icónica precede quase sempre a simbólica, (exemplos 3, 4, 7, 10, 13, 14, 18, 19, ...), embora nesta idade a distribuição de símbolos no papel não indique

[45] 29 em 599, isto é, 4,8 %

[46] Ver Quadro II

[47] 197 em 599, isto é, 32,9%

[48] Ver Quadro XIV

necessariamente a mesma relação espaço/tempo do registo de um adulto.

O que acabámos de referir leva-nos a levantar a hipótese de que a construção de estratégias simbólicas se processa com maior segurança, quando efectuadas a partir das estratégias icónicas, do que das de acção. Os exemplos 8, 9 e 10 parecem revelar a passagem de uma estratégias icónica a uma simbólica operatória. Tal facto é realçado, nos dois últimos exemplos referidos, pela forma como os numerais e os sinais operatórios são colocados relativamente ao desenho.

Muitos dos trabalhos analisados manifestam existência simultânea de mais de um tipo de estratégia, pelo menos até ao fim do 3º ano, conduzindo cada uma delas ao resultado do problema. Como já foi referido, a utilização de vários caminhos na busca de uma mesma solução, além de desenvolver a criatividade, permite a auto-correcção. A análise estatística efectuada parece mostrar a vantagem desse procedimento, ao revelar a maior eficácia da utilização conjunta de estratégias icónicas e simbólicas sobre a utilização de uma só dessas estratégias no final do 1º ano[50], e ao mostrar que os melhores alunos preferem usar nos três problemas essas duas estratégias ou mudar de estratégia de um problema para outro[51]. Os exemplos 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 17 mostram-nos a utilização conjunta de vários tipos de estratégias no mesmo problema. Os três primeiros foram efectuados no 1º ano, os restantes no 2º ano. Ilustram simultaneamente a evolução dos processos de resolução de problemas de multiplicação, desde as estratégias iconográficas (exemplos 11, 12, 13 e 14), passando pelas simbólicas aditivas (exemplos 12, 13, 15, 16 e 17) terminando nas simbólicas multiplicativas (exemplos 13, 14, 16 e 17), com a utilização episódica de estratégias de acção como apoio ao raciocínio (exemplos 14 e 16).

---

[49] Fig. 9.1

[50] Quadro II

[51] Quadros XI e XIII

Estes dois exemplos constituem-se exactamente como as derradeiras utilizações de estratégias de acção. Datam de Dezembro do 2º ano de escolaridade.

Por vezes, é possível detectar o emprego correcto de um tipo de estratégia, seguido de uma outra mais avançada e incorrectamente formulada. São disso exemplos os nº 18, 19 e 20 respeitantes a problemas do 1º ano.

Entre as estratégias de tipo simbólico também se manifesta uma evolução. Começam por ser hesitantes e com erros na utilização dos símbolos matemáticos, como é o caso dos exemplos que acabámos de assinalar. Vão-se, no entanto tornando mais seguras e correctas. Aparecem novos símbolos que abrem novas possibilidades de formulação. Os exemplos 21, 22, 23 e 24 mostram-nos uma primeira forma espontânea do que podemos considerar um percursor do parênteses. Pensamos que terá as suas raízes na linha fechada do diagrama de Venn, uma vez que a criança expressa que o que fica dentro dela deve ser considerado como um todo, segundo soubemos por relato das professoras. Estes registos pertencem ao 2º ano. É ainda do mesmo ano o exemplo 25, que já revela o uso do parênteses convencional. Os exemplos 26, 27 e 28 são do 3º ano. Os exemplos 29 a 35 relativos a problemas do 4º ano, manifestam uma formulação já bastante elaborada, revelando um domínio da linguagem simbólica matemática e uma capacidade de raciocínio e de síntese pouco comuns em crianças desta idade e deste nível de ensino. Eles pertencem a três crianças de um bairro de Lisboa, que é conhecido por ser habitado por populações de extracto social, cultural e económico baixo (exemplos 29, 31, 33 e 34), e a uma criança de um meio piscatório, de pais que possuem apenas a 4ª classe (exemplos 30, 32 e 35).

É igualmente curioso verificar o bom desenvolvimento do cálculo mental. Não se apresentam exemplos específicos de tal facto uma vez que 48 dos 59 problemas constantes do Anexo IV são resolvidos com o recurso a essa forma de cálculo (81,4%).

Um outro aspecto interessante que nos foi dado observar, ao analisar os trabalhos destes alunos, foi a grande diversidade de processos que surgem na resolução de uma mesma situação problemática. Os exemplos 36 a 49 e ainda o exemplo 21, constituem 15 formas de resolução de uma mesma situação de divisão. Alguns diferem na forma de raciocínio, outros apenas no modo de formulação. Em alguns deles existem incorrecções. O problema a que se referem integrava o teste do final do 2º ano, numa etapa em que se encontra em construção o sentido da divisão.

Os exemplos 50 a 59 referem-se à resolução de um problema constante do teste final do 4º ano. É de assinalar a grande diversidade de processos utilizados, embora todos eles de tipo simbólico. Pensamos que toda esta criatividade se justifica por uma pedagogia em que, como já foi dito, não se ensina a forma de resolver os problemas, antes se estimula a busca de caminhos, a criação de estratégias próprias, a construção pessoal ou em grupo de processos, cuidando-se que estes sejam aperfeiçoados, defendidos e criticados através de interacções mais horizontais que verticais.

CONCLUSÃO

A terceira questão que se procurou investigar com este estudo reflectia uma preocupação com a forma como evoluíam os processos de resolução de problemas das crianças.

Para responder a esta questão examinaram-se os registos de resolução de problemas efectuados pelos sujeitos da amostra ao longo dos quatro anos de escolaridade primária. Essa análise diacrónica foi realizada por meio da construção de uma tabela de contingência dos diferentes tipos de estratégia encontrados, e enriquecida com uma descrição de alguns aspectos qualitativos dessa evolução que puderam ser observados nos registos das crianças e que pareceram de interesse para o estudo.

A conclusão a que se chegou foi a de que os iniciais processos das crianças, bastante ingénuos e incipientes, se haviam transformado em outros, mais elaborados e consistentes, à medida que a aprendizagem decorria. No final dos quatro anos que a experiência durou, foi possível observar que os processos de resolução de problemas que as crianças construíram se revelavam, de uma forma geral, bastante coerentes, fazendo apelo apenas a estratégias de tipo simbólico e expressando-se de forma adequada, através da linguagem simbólica matemática.

PARTE IV

CONCLUSÕES FINAIS

CAPÍTULO 10

CONCLUSÕES FINAIS

> Um professor de Matemática tem uma grande oportunidade. Se ele ocupa o tempo que lhe é atribuído a treinar os seus alunos com operações de rotina, ele mata o seu interesse, impede o seu desenvolvimento intelectual e desperdiça a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos seus alunos através de problemas proporcionados ao seu conhecimento e os ajuda a resolver as suas dificuladades colocando-lhes questões estimulantes, pode dar-lhes o gosto por, e alguns meios de, pensamento autónomo.
>
> G. Pólya, How to solve it

Resolver problemas é uma actividade fundamental na Matemática, quer se trate de problemas teóricos ou de problemas da vida real. Na verdade, se os primeiros constituem um desafio que se coloca aos matemáticos enquanto cientistas, os segundos conferem um sentido eminentemente pragmático a uma ciência que é, em si mesma, uma construção abstracta.

Resolver problemas é igualmente uma actividade pedagógica de inegável valor. Sendo fundamentalmente estimulante, tem potencialidades para tornar aliciante uma tarefa que, de outra forma, se arrisca a ser penosamente árdua: aprender Matemática. Tudo depende da perspectiva metodológica assumida.

Na experiência que esteve na origem deste estudo todo o ensino foi concebido como "*via* resolução de problemas", deixando em segundo plano as outras duas perspectivas de ensino "*sobre* resolução de problemas" e "*para* a resolução de problemas"[52]. Como tal, a resolução

[52] Enquanto o "ensino via resolução de problemas" procura conseguir que toda a aprendizagem se faça através da resolução de problemas, o "ensino sobre resolução de

de problemas assumiu-se como actividade diária, alicerce de todo o conhecimento matemático, o que não significa que deva ser exclusiva mas apenas predominante[53]. O grande relevo que lhe foi dado no modelo pedagógico utilizado na experiência, será certamente um factor explicativo da riqueza encontrada nos processos de resolução de problemas dessas crianças. Ao examinar mais atentamente esses processos, procurou-se verificar, com o estudo agora terminado, se deles emergiam alguns tipos de estratégias regularmente utilizadas pelas crianças (Questão 1 da investigação), e, em caso afirmativo se estariam relacionadas, por um lado, com o nível de competência matemática, por outro, com o nível de factor g de inteligência (Questão 2 da investigação) e finalmente qual a evolução desses processos ao longo dos primeiros anos de escolaridade (Questão 3 da investigação).

10.1 RESUMO DAS CONCLUSÕES DO ESTUDO

A investigação realizada permitiu-nos:

- detectar a existência de algumas estratégias frequentemente utilizadas pelas crianças, que foram designadas por estratégias de acção, estratégias iconográficas e estratégias simbólicas, de acordo com a modalidade de representação a que fazem apelo;
- constatar a ligação existente entre os processos utilizados na resolução dos problemas e o nível de competência matemática das crianças que os utilizam;
- verificar que os iniciais processos informais evoluem ao longo dos quatro anos para outros mais abstractos e institucionalizados.

---

problemas" procura ensinar boas técnicas de resolução de problemas e o "ensino para a resolução de problemas" preocupa-se essencialmente em ensinar conhecimentos matemáticos úteis à resolução de problemas. A perspectiva de PÓLYA é a de um "ensino via resolução de problemas".

[53] Além de problemas as crianças eram solicitadas a fazer outros tipos de actividades, como jogos, exercícios de diversos tipos, nomeadamente exercícios de cálculo, construções geométricas, etc..

Não foi possível detectar, na generalidade dos casos, a existência de relações entre os tipos de processo utilizados e o nível de realização, em determinado momento, das matrizes de Raven - factor g de inteligência. A única excepção verificou-se com o grupo de crianças que utilizam invariavelmente estratégias simbólicas e o grupo das que variam de tipo de estratégia de problema para problema: o primeiro grupo obteve melhores resultados na execução das matrizes de Raven.

Reflectindo sobre a evolução dos processos de resolução de problemas somos levados a admitir a existência de uma hierarquia de precedência entre os diversos tipos de estratégias que parece indicar que as estratégias iconográficas se constroem a partir das de acção e as simbólicas a partir dos outros dois tipos.

De facto, as estratégias de acção, que aparecem no início da escolaridade, vão sendo substituídas pelas icónicas e, finalmente, pelas simbólicas. O seu desaparecimento não é brusco, mas gradual. Foi possível detectar a existência de estratégias de acção no final do 1º ano de escolaridade, momento em que são utilizadas com êxito por crianças com maiores dificuldades em Matemática. No entanto, os últimos registos de estratégia deste tipo datam de Dezembro do 2º ano (exemplos 14 e 16 do Anexo IV).

Quanto às estratégias icónicas, elas permanecem até ao final do 3º ano. São exactamente processos que complementam a utilização de estratégias deste tipo com estratégias simbólicas, cada uma das quais conduzindo independentemente à solução de problema, os que se revelaram como mais eficazes no último teste do 1º ano (90,9% de êxito). Esta conclusão parece estar em sintonia com o facto de os melhores alunos, isto é, os alunos com melhores resultados em Matemática nesse momento, preferirem usar esse tipo de processos na resolução dos problemas, embora não tenha sido possível encontrar diferenças significativas no seu nível de factor geral de inteligência relativamente aos que utilizam apenas estratégias icónicas ou estratégias simbólicas.

Por outro lado, os processos que aliam a representação simbólica directamente a estratégias de acção apresentam uma taxa de eficácia muito baixa (62,1%). Parece ser assim possível concluir que são as estratégias icónicas que melhor apoiam e reforçam as simbólicas, permitindo às crianças que as utilizam conjuntamente, serem mais eficazes, neste momento da escolaridade em que estão a construir o raciocínio operatório.

Aliás, a importância da representação icónica na génese da representação simbólica a nível da resolução de problemas ressalta como a constactação eventualmente mais interessante de todo o estudo.

Se reflectirmos sobre a teoria de PIAGET, verificamos que, para este autor, o pensamento operatório emerge directamente da acção concreta sobre os objectos. A investigação agora realizada aponta para a existência de uma fase intermédia na qual a representação desenhada, gerada a partir da acção, parece vir facilitar o aparecimento do pensamento operatório e a correspondente representação simbólica. Tal constactação estará mais consonante com a teoria de desenvolvimento de BRUNER, que, como vimos no Capítulo 4, considera três diferentes estádios de representação do conhecimento: o de acção, o icónico e o simbólico.

No entanto, o recurso a estratégias de tipo icónico não constitui uma prática habitual no ensino da Matemática, a nível do 1º ciclo, conforme nos foi possível observar. Surge, quando muito, a propósito do estudo da geometria e, ainda assim, raramente. Mesmo a manipulação de objectos aparece apenas no primeiro trimestre do 1º ano e, por vezes, no início do segundo trimestre, deixando rapidamente de fazer parte da prática da sala de aula. Isto implica que, crianças que possuem um raciocínio claramente ligado à acção[54], são levadas a utilizar estratégias de tipo simbólico fragilmente alicerçadas em estratégias de acção, sem que lhes seja permitido o recurso à representação icónica como uma forma de apoio ao seu raciocínio ainda hesitante.

[54] Encontram-se no "estádio das operações concretas", conforme o referido no Capítulo 4 da dissertação.

O simples facto de poderem recorrer a tipos de representação diferentes, que lhes permitem construir uma grande variedade de processos, coloca as crianças da experiência em vantagem. Os alunos que variaram de processo conforme o problema a resolver, apesar de terem obtido um menor nível de eficiência nos testes de factor geral de inteligência relativamente aos que optaram invariavelmente por estratégias de tipo simbólico, obtiveram em Matemática tão bons resultados quanto estes.

Para além disso, as crianças da experiência revelaram, de uma forma geral, grande criatividade na busca de caminhos e na construção de estratégias, desenvolveram o seu raciocínio e aprenderam a utilizá-lo com eficácia na resolução de problemas.

O mesmo se verificou com o cálculo mental. A maioria dos problemas de que possuímos o registo escrito dos alunos e, em muitos casos, o respectivo rascunho foram resolvidos por recurso a essa forma de cálculo.

Verifica-se assim que as crianças têm potencial para construir os seus próprios processos de resolução de problemas. Neste estudo pudemos verificar o desenvolvimento de tal potencial.

Consideramos que o processo de ensino/aprendizagem usado, por acreditar no valor dessas criações ingénuas das crianças e estimular o seu aparecimento e utilização, terá contribuído para o desenvolvimento desse potencial.

10.2 ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE A APLICAÇÃO DO MODELO PEDAGÓGICO E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

No Capítulo 3 referiu-se um debate havido no ICME 6[55] no qual se concluía a necessidade de se desenvolverem cursos protótipo que tornem possível uma aprendizagem de cariz construtivista na qual

[55] Congresso da International Commission on Mathematic Instruction realizado em 1988 em Budapeste.

se considerem e perspectivem as estratégias naturais das crianças como núcleo de toda a aprendizagem.

Como já atrás foi referido[56], o modelo de ensino/aprendizagem da Matemática utilizado na experiência foi todo pensado segundo esta perspectiva, cuidando de que cada novo conhecimento fosse construído a partir da resolução de problemas, propostos às crianças ou criados por elas, sob a forma de situações reais, de problemas verbais ou de jogos de estratégia. O professor não deveria, em caso algum, ensinar o processo de resolução, permitindo assim aos pequenos alunos que construíssem as suas próprias estratégias.

Os docentes que aplicaram este modelo nas suas classes aderiram particularmente bem a esta proposta. Isto não significa que não tenha havido algumas reticências iniciais, explicáveis por muitos anos de práctica na utilização de sistemas de ensino que sobrevalorizavam a aquisição de algoritmos e técnicas de cálculo através de exercícios monótonos e repetitivos, bem como o ensino de modelos únicos de resolução de problemas.

No entanto, os seus muitos anos de docência interessada possibilitava-lhes o reconhecimento da aprendizagem e assim os avanços das crianças foram-lhes falando da eficácia do modelo.

Tal constatação, aliada a um grande profissionalismo, abertura à inovação e profunda implicação no processo de investigação, permitiu-lhes efectuar um percurso de mudança caracterizado pelo abandono das anteriores práticas e a adesão às novas propostas.

A metodologia de investigação-acção revelou-se especialmente adequada à aprendizagem que realizaram, com o apoio da equipa de investigadores, sobre as capacidades dos seus alunos. Terá sido tal aprendizagem a que verdadeiramente originou um itinerário de profunda transformação na sua prática pedagógica.

[56] No Capítulo 4.

Assim, os professores aperceberam-se que:

- As crianças aprendiam mais rapidamente e melhor se lhes fosse permitido construírem, eles próprios, o seu conhecimento
- Desenvolviam com maior segurança a sua capacidade para resolver problemas se os processos não lhes fossem impostos.

Passaram a acreditar na criatividade e capacidade de raciocínio dos seus alunos. Descobriram a grande importância da representação pela acção e, especialmente, da representação icónica na construção do raciocínio operatório. Verificaram as vantagens de os deixar trabalhar em grupo e discutir entre si, compreendendo o interesse do debate como forma de estimular a evolução de estratégias, a aprendizagem da argumentação de defesa, a descoberta de formas mais perfeitas de utilização da linguagem simbólica matemática. Tornaram-se cada vez mais autónomos e criativos nas suas propostas pedagógicas, capazes de conduzirem o percurso de ensino/aprendizagem numa partilha de poder com os seus alunos, assumindo com eles uma complementaridade de funções e aceitando que o centro de todo o processo estava nas próprias crianças.

O seu contributo para a investigação foi verdadeiramente importante, não só pela forma como souberam dar vida a um modelo inovador, mas ainda pelos preciosos contributos para o desenrolar da experiência, pelo feedback que protagonizaram e a reflexão crítica em que sistematicamente participaram.

Por sua vez, os alunos sujeitos a este sistema de ensino desenvolveram um grande gosto pela Matemática e por fazerem Matemática, gosto esse que se reflectiu no sucesso obtido nesta disciplina nos subsequentes níveis de ensino. No Anexo V damos notícia dos resultados obtidos por alguns desses alunos nos anos que se seguiram à experiência.

Tudo o que se acabou de referir me leva a ser optimista no que respeita à formação de professores e à sua capacidade para mudarem as suas práticas de ensino, muito especialmente quando integrados num projecto de investigação no qual desempenham um papel de actores intervenientes e críticos. Este meu optimismo permanece mesmo quando se utiliza um *modelo em cascata*, desde que, tanto na formação dos formadores de nível intermédio, como na dos próprios professores, se utililize uma metodologia adequada, como é o caso da investigação-acção. Foi o que aconteceu na experiência que alicerça este estudo, uma vez que, terminados os quatro anos de investigação, os professores do Ensino Primário, que nela haviam participado, se tranformaram em formadores de outros professores. Neste momento são cerca de seiscentos os que, integrados em equipas de investigação coordenadas por um desses professores-formadores e centralmente apoiadas pela equipa de investigadores, aplicam nas suas salas de aula o modelo pedagógico que havia sido criado e que tem vindo a ser adaptado no decurso de todo este processo, prolongando e ampliando o inicial projecto de investigação-acção.

Desta nova etapa nos dá notícia o Prof. Leandro de ALMEIDA (1990) que procedeu a uma análise dos resultados obtidos por uma amostra de alunos sujeitos ao modelo pedagógico da experiência e os comparou com os resultados de uma outra amostra equivalente de crianças não sujeitas ao modelo, que se encontravam no mesmo momento de escolarização - o final do 2º ano do Ensino Primário. No que respeita aos resultados em Matemática, o relatório refere que "a realização dos alunos ligados ao Projecto mais que duplica, em termos de pontuação média, a realização dos seus colegas"... a "grandeza das diferenças verificadas - nalguns itens surpreendentes, pelo menos no seu significado numérico - ... verifica-se quer nos exercícios quer, e sobretudo, nos problemas". E o autor prossegue: "certamente que estaremos perante um dado informativo que salienta duas formas diferentes de prosseguir o ensino e a consequente aprendizagem na Matemática. Estaremos perante valores de tal forma discrepantes entre os dois grupos que, de imediato, somos levados a pensar que a um ensino voltado para a feitura repetida de problemas mais estandardizados por parte dos professores em geral, se contrapõe um modelo mais bem sucedido de ensino e aprendizagem que salvaguarda a iniciativa do aluno, valoriza a sua compreensão dos problemas, promove a sua representação e esquematiza um pensamento mais operacional para a sua resolução." (p. 30-31)

A metodologia de investigação-acção revela-se assim, uma vez mais, um poderoso meio de introdução de inovação e de formação de professores.

10.3 IMPLICAÇÕES PARA A EDUCAÇÃO

Gostaríamos finalmente de referir algumas implicações para o domínio da educação, que julgamos poder retirar de tudo o que ficou dito.

É possível desenvolver sistemas de ensino em que as construções e produções das crianças constituam a espinha dorsal. Um adequado processo de ensino/aprendizagem, baseado predominantemente na resolução de problemas e que respeite essas construções, poderá fazê-las evoluir para formas mais institucionalizadas.

Os conhecimentos matemáticos podem ser construídos através das criações das próprias crianças. Este estudo dá-nos alguns exemplos de tal facto nas aprendizagens da resolução de problemas, do sentido das operações aritméticas e no desenvolvimento do cálculo mental.

Sistemas de ensino como o referido só podem desenvolver-se num profundo respeito por cada criança, sua forma de raciocínio, seu ritmo, sua maneira de se exprimir, sua personalidade como um todo e ainda no respeito pelo grupo constituído por toda a classe.

Na elaboração de tais sistemas de ensino o relevo dado à construção dos conceitos joga um papel fundamental, pois neles se alicerçam as restantes aprendizagens. Torna-se assim imprescindível estudar profundamente cada conceito para nos podermos aperceber dos aspectos verdadeiramente pertinentes que o constituem e das modalidades em que eles se tornam acessíveis às crianças em cada etapa do seu desenvolvimento e da sua aprendizagem. Seremos então capazes de imaginar situações pedagógicas adequadas e de, na prática, avaliar, em cada momento, quais as descobertas pertinentes que os alunos vão efectuando. Essas pequenas descobertas devem ser valorizadas e partilhadas por todo o grupo, de forma a serem assumidas conscientemente, passando assim a integrar o património cognitivo das crianças. Todo este processo deve ser cuidadosamente conduzido, sem falsas pressas que possam comprometer futuras construções do conhecimento, numa atitude de grande atenção e respeito aos sinais de auto-regulação da aprendizagem que cada criança deixa transparecer.

A utilização da acção e do desenho na construção do conhecimento deve ser estimulada. Tais formas de representação, funcionando como suportes do raciocínio da criança, permitem-lhe desenvolver o seu pensamento operatório e construir, de uma maneira pessoal, o conhecimento matemático. Devem assim as salas de aula estar apetrechadas com material pedagógico diversificado e abundante mas não necessariamente dispendioso. A existência de materiais de expressão, tais como, canetas de feltro, lápis de cor ou de cera, pode igualmente ser um incentivo à representação icónica.

Sendo as interacções sociais, horizontais e verticais, tão importantes como forma de estimular o desenvolvimento e a aprendizagem, nomeadamente no domínio da expressão simbólica e da validação dos processos, elas devem ser igualmente incentivadas. Assim sendo, a organização da sala de aula deve ser flexível de forma a permitir quer o trabalho individual, quer o trabalho em pequeno ou grande grupo.

O professor desempenha na sala de aula um papel fundamental, ainda que nunca se deva assumir como actor principal. A ele compete criar um ambiente estimulante mas que simultaneamente confira segurança na aprendizagem, construir as situações pedagógicas adequadas, orientar o processo de ensino/aprendizagem. Deve intervir heuristicamente, colocando as questões pertinentes em cada situação, fazendo sugestões que possibilitem ultrapassar um impasse, tirando partido, com grande clareza, dos erros que se vão cometendo.

10.4 SUGESTÕES PARA FUTURAS INVESTIGAÇÕES

Na continuação do trabalho desenvolvido neste estudo poderiam ser feitas algumas investigações que permitissem clarificar questões que ficaram sem resposta.

Uma dessa questões poderia ser: Como se geram as estratégias icónicas? Sempre a partir das de acção ou podem surgir independentemente destas? E as estratégias simbólicas podem ser construídas apenas com base nas icónicas ou acontece que algumas crianças, nomeadamente as que possuem um tipo de pensamento menos abstracto, necessitam do apoio das de acção?

Um outro tipo de questão nos parece igualmente importante. A nível da investigação em Educação Matemática, tem despertado grande interesse a forma como diversos factores interferem significativamente com a capacidade para resolver problemas[57]. Seria interessante averiguar qual a relação existente entre a abordagem que se realiza, ou não se realiza, no ensino primário português à aquisição de conceitos e o desenvolvimento desta capacidade.

Parece-nos igualmente pertinente procurar descobrir que representações dos conceitos matemáticos possuem os professores e até que ponto essas representações constituem um recurso ou um obstáculo à construção do conhecimento pelas crianças.

[57] No Capítulo 2 da dissertação referem-se alguns desses trabalhos.

AGRADECIMENTOS

Desejo expressar o meu agradecimento a todas as pessoas que tornaram possível a realização desta dissertação:

Profª. Doutora Teresa Ambrósio e Dr. António Jorge Andrade que a orientaram

Drª Maria da Luz Leitão e toda a equipa do Projecto «Ensinar é Investigar», especialmente as colegas que mais perto estiveram das crianças cujos trabalhos foram analisados neste estudo

Prof. Doutor Domingos Fernandes, Profª. Doutora Glória Ramalho, Dr. José Manuel Matos, Dr. Victor Teodoro pelo apoio, conselho e sugestões

Dr. Raul Fernando de Carvalho e Colegas do Núcleo de Matemática da ESE de Setúbal pelo apoio e incentivo

BIBLIOGRAFIA

AAAS, 1989, *Science for all americans: a project 2061 report on literacy goals in Science, Mathematics and Technology*, Washington, American Association for the Advancement of Science.

ALMEIDA (Leandro S.), 1988, *O raciocínio diferencial dos jovens*, Porto, Instituto Nacional de Investigação Científica.

ALMEIDA (Leandro S.), 1990, *Relatório da avaliação externa do Projecto «Ensinar é Investigar»*, Braga. Documento policopiado.

AMBRÓSIO (T.), 1987, *Aspirations sociales, projects politiques et efficience socio-culturelle. (le cas de la politique d'éducation au Portugal). Contribuition à une psycho-sociologie du fait politique.* Thèse de doctorat, Université François Rabelais, Tours

ANDRADE (A.J.), 1988, *Le sense des Mathématiques: contribution à une compréhension personnalisée de leur apprentissage.* Mémoire de D.E.A., Université François Rabelais, Tours, document policopié.

APM, 1988, *Renovação do currículo de Matemática*, Lisboa, Associação dos Professores de Matemática.

ARGINSKAIA (I. I.), 1977, Formation of the concept of a "problem" ZANKOV (L. V.) and OTHERS, 1977, *Teaching and development*, White Plains, New York, M. E. Sharpe.

BACHELARD (Gaston), 1984, *A epistemologia*, Lisboa, Edições 70.

BACHELARD (Gaston), 1986, *O novo espírito científico*, São Paulo, Edições 70.

BALACHEFF (N.), LABORDE (J. M.), 1984, Introduction à l'édition française. *La logique de la découverte mathematique, preuves et réfutations: essai sur la logique de la découverte mathematique*, Paris, Hermann, p. xiii-xx.

BANA (J.), NELSON (D.), 1978, Distractors in nonverbal mathematical problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9(1), 55-61, Reston, National Council of Teachers of Mathematics.

BARBIER (J. M.), 1990, Analyser les demarches de recherches. Estrela, A. e Falcão, M. E. (eds.). *Le recherche-action en education: problèmes et tendences: Actes du I Colloque National de l'Association Internationale de Pedagogie Experimentale de Langue Française*, Lisboa, Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade de Lisboa.

BELL (Alan), 1991, *Learning process in mathematics - observation and evaluation*, comunicação apresentada no encontro Information Technology and Mathematical Problem Solving Research, Viana do Castelo.

BIGGE (Morris L.), 1977, *Teorias da aprendizagem para professores*, São Paulo, EPU, edição da Universidade de São Paulo.

BLACKWELL (David), HENKIN (Leon), 1989, *Mathematics, Report of the Project 2061 Phase I Mathematics panel*, Washington, American Association for the Advancement of Science.

BOERO (Paolo), 1991, *The crucial role of semantic fields in the development of problem solving skill in the school environment*, comunicação apresentada no encontro Information Technology and Mathematical Problem Solving Research, Viana do Castelo.

BORASI (Raffaella), 1986, On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, 17(2), p. 125-141.

BOUDON (Raymond), 1979, *La logique du social*, Paris, Hachette.

BRISSIAUD (R.), 1985, De l'age du capitaine à l'age du berger: quel controle de la validité d'un énoncé de problème au CE *Revue Française de Pédagogie*, 82, p. 23-31.

BRISSIAUD (R.), ESCARRABAJAL (M. C.), 1989, Formulation des énonces: classique vs récit. *Revue Française de Pédagogie*, 74, 47-52.

BRODY (Nattran), 1985, The validity of tests of intelligence. *Handbook of intelligence: theories, measurement and applications*. Benjamin B. Wolman (ed), New York, John Wiley Sons, p. 353-389.

BROUSSEAU (Guy), 1970, *Aprendizagem das estruturas*, Conferência pronunciada em Clermont-Ferrand nas Jornadas da A.P.M..

BROUSSEAU (Guy), 1986, Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 7, Paris, La Pensée Sauvage Éditions, p. 33-155.

BROUSSEAU (Guy), 1990, Le contract didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 9, Paris, La Pensée Sauvage Éditions, p. 309-336.

BROWDER (Felix), MACLANE (Saunders), 1988, A relevância da Matemática. *A natureza da Matemática*, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, p. 17-44.

BRUNER (Jerome S.), 1975, *Uma nova teoria da aprendizagem*, Rio de Janeiro, Bloch/INL.

BRUNER (Jerome S.), 1973, *O processo da educação*, São Paulo, Companhia Editora Nacional.

CHARLES (Randall I.), LESTER (Frank K.), 1984, An evaluation of a process-oriented instructional program in mathematical problem solving in grades 5 and 7. *Journal of Educational Research*, 15(1), 15-34, Reston, National Council of Teachers of Mathematics.

CHASE (C. I.), 1964, The position of certain variables in prediction of problem-solving in arithematic. *Journal of Educational Research*, 54(1), p. 9-14, Reston, National Council of Teachers of Mathematics.

COMMITTEE OF INQUIRY INTO THE TEACHING OF MATHEMATICS IN SCHOOLS, 1982, *Mathematics counts*, London, Her Magesty's Stationery Office.

CONFREY (Jere), 1990, A Review of the research on student conceptions in Mathematics, Science and Programming. *Review of Research in Education*, 16, p. 3-56.

COONEY (Thomas J.), 1985, A beginning teacher's view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(5), p. 325-336, Reston, National Council T. M..

DAVIES (Don) e outros, 1989, *As escolas e as famílias em Portugal: realidade e perspectivas*, Lisboa, Livros Horizonte.

DAVIS (Philip J.), HERSH (Reuben), 1988, Da certeza à falibilidade. *A natureza da Matemática*, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, p. 45-72.

DERAMECOURT (Gerard), Outros, 1978, *Enseignement des Mathématiques au Cycle Préparatoire*, I.R.E.M. de Bordeaux

DODSON (J. W.), 1974, Caracteristics of successful insightful problem solvers. *NLSMA Report*, No. 31, Stanford, California, Schools Mathematics Study Group.

DOISE (Willem), MUGNY (Gabriel), 1981, *Le développement social de l'intelligence*, Paris, InterEditions.

DURAND (Daniel), 1990, *La systémique*, Paris, Puf.

ENSINAR É INVESTIGAR, 1984, *Relatório de actividades relativas a 1983 / 84*, documento policopiado.

ENSINAR É INVESTIGAR, 1985, *Relatório de actividades relativas 3ª Fase (2º ano)*, documento policopiado.

ENSINAR É INVESTIGAR, 1986, *Relatório de actividades relativas 3ª Fase (3º ano)*, 2 vol., documento policopiado.

ERNEST (Paul), 1991, *Problem solving: its assimilation to the teacher's perspective*, comunicação apresentada no encontro Information Technology and Mathematical Problem Solving Research, Viana do Castelo.

ERNEST (Paul), 1991, *The philosophy of mathematics education*, London, The Falmer Press.

ESTEVES (A. J.), 1990, A investigação-acção in *Metodologia das Ciências Sociais*, Silva, A. S. e Pinto, J. M. (orgs.), Lisboa, Edições Afrontamento.

FAYOL (M.), ABDI (H.), 1986, Impact des formulations sur la résolution de problèmes additifs chez l'enfant de 6 à 10 ans. *European Journal of Phychology of Education*. 1(1), p. 41-58.

FERNANDES (Domingos), 1988, *Comparison of the effects of two models of instruction on the problem-solving performance of preservice elementary schools teatchers and on their awareness of the problem-solving strategies they employ*, doctoral dissertation, Texas A and M University.

FERRARI (Luigi), 1991, *Aspects of hypothetical reasoning in problem-solving*, comunicação apresentada no encontro Information Technology and Mathematical Problem Solving Research, Viana do Castelo.

FISCHBEIN (Efraim), 1990, Introduction in *Mathematics and Cognition*, ed. Pearla Nesher and Jeremy Kilpatrick, Cambridge, Cambridge University Press, p. 1-13.

FREDERIKSEN (N.), 1984, Implications of cognitive theory for instruction in problem solving. *Review of Educational Research* 8 (3), p. 163-180.

FREUDENTAL. (H.), 1983, *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Reidel.

GINSBURG (H.), 1975, Young children's informal knowledge of mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1(3), p. 63-156.

GIORDAN (André), 1987, *L'Élève et/ou les connaissances scientifiques*, Berne, Peter Lang.

GIORDAN (André), VECCHI (Gérard), 1987, *Les origines du savoir*, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

GLASERSFELD (Ernest von), 1984, An introduction to radical constructivism. *The invented reality*. Watzlawick, P. (ed.), ww Norton & Company.

GLASERSFELD (Ernest von), 1985, Reconstructing the concept of knowledge. *Archives of Psychologie*, 53, p. 91-101.

GOLDBERG (D. J.), 1974, *The effects of training in heuristic methods in the ability to write proofs in number theory*, doctoral dissertation, New York, Teacher's College, Columbia University.

GUILFORD (J.P.), 1967, *The nature of human intelligence*, New York, McGraw-Hill.

GUILFORD (J.P.), FRUCTER (Benjamin), 1978, *Fundamental statistics in Psychology and Education*, Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha.

HART (Kathleen), 1983 I know what I believe; Do I believe what I know? *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(2), p. 119-125, Reston, National Council of Teachers of Mathematics.

HART (Kathleen), JOHNSON (David), BROWN (Margaret), DICKSON (Linda), CLARKSON (Rod), 1986, *Children's mathematical frameworks 8-13: A study of classroom teaching*, Johnson (editor), London, NFER-Nelson.

I.C.M.I., 1986, *Las Matemáticas en primária y secundária en la decada de los 90*, Kuwait, I.C.M.I..

I.C.M.I., 1988, *Proceedings of the International Congress on Mathematical Education*, Southampton, Ann and Keith Hirst (ed.), Department of Mathematiques of the University Southampton.

INTERNATIONAL COUNCIL FOR ADULT EDUCATION, 1977, *Status report on the Participatory Research Project*, Toronto, International Council for Adult Education.

JERMAN (M. E.), 1974, Problem length as a strucural variable in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics*, v. 5, p. 109-123.

KANTOWSKI (Eleanore Louise), 1974, *Processes involved in mathematical problem solving*, doctoral dissertation, University of Georgia.

KANTOWSKI (Mary Grace), 1980, Some thoughts of teaching for problem solving. *Problem Solving in school mathematics*, Reys (R.) (ed.), Reston, NCTM.

KEPPEL (Geoffrey), 1982, *Design and analysis: a researcher's handbook*, New Jersey, Prentice-Hall.

KILPATRICK (J.), 1968, Analyzing the solution of word problems in Mathematics: An exploration study. *Dissertation Abstracts*, 28(11), 4380A.

KILPATRICK (Jeremy), 1985, A retrospective account of the past 25 years of reseach on teaching mathematical problem solving. *Teaching and Learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, Silver (editor), London, Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

KILPATRICK (Jeremy), 1991, *Some issues in the assessment of mathematical problem solving*, comunicação apresentada no encontro Information Technology and Mathematical Problem Solving Research, Viana do Castelo.

KNIFONG (J. D.), HOLTAN (B.), 1976, An analysis of children's written solutions to word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 7(2), p. 105-112.

KROLL (Diana L.), 1989, Connections between psychological learning theories and the elementary mathematics curriculum. *New Directions for Elementary School Mathematics* - 1989 Yearbook, Virgínia, National Council of Teachers of Mathematics.

LAKATOS (Imre), 1978, *A lógica do descobrimento matemático, provas e refutações*, Rio de Janeiro, Zahar Editores.

LANDSHEERE (G.), 1986, *A investigação experimental em pedagogia*, Lisboa, Publicações D. Quixote.

LEITÃO (M. L.), PANHAIS (F.) e PIRES (I. V.), 1992, *Da criança ao aluno: actividades e iniciação*, Lisboa, Instituto de Inovoção Educacional (no prelo).

LERBET (Georges), 1981, *Une Nouvelle Voie personaliste: le systeme - Personne*, Editions Universitaires UNMSREO.

LERBET (Georges), 1984, *Approche systemique et prodution de savoir*, Mesonance/Alterologie.

LERBET (Georges), 1986, *De la structure au système*, Mesonance/Alterologie.

LERBET (Georges), 1990, *Le flou et l'écolier: la culture du paradoxe*, Mesonance/Alterologie.

LESTER (F. K.), 1975, Developmental aspects of children's ability to understand mathematical proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 6(1), p. 14-25, Reston.

LESTER (F. K.), 1978, Mathematical problem solving in the elementary school: some educational and psychological considerations. *Mathematical problem solving: papers from a research workshop*, Hatfield and Bradbard (eds.), Columbus, p. 53-87.

LESTER (F.K.), 1980 a), Problem solving: Is it a problem? *Selected issues in mathematiques education*, Lindquist (ed.), Reston, NCTM.

LESTER (F.K.), 1980 b), Research on mathematical problem solving. *Research in mathematiques education*, R. J. Shumway (ed.), Reston, The National Council of Teatchers of Mathematics, p. 286-323.

LINVILLE (W. J.), 1970, The efects of syntax and vocabulary upon the difficulty of verbal arithematic problems with fourth grades students. *Dissertation Abstracts International*, 30, 43 10A.

LUCAS (F. F.), 1974, The teaching of heuristic problem-solving strategies in elementary calculus. Journal for *Research in Mathematics Education*, 5(1), p. 34-36, Reston, National Council of Teachers of Mathematics.

MARTIN (M. D.), 1984 Reading comprehension, abstract verbal reasoning and computation as factors in arithematic problem solving. *Dissertation Abstracts*, 24, 4547 - 4548.

MASON (John), 1991, *Researching problem solving from the inside*, comunicação apresentada no encontro Information Technology and Mathematical Problem Solving Research, Viana do Castelo.

MOREIRA (Maria Leonor), 1989, *A folha de cálculo na educação matemática*, Lisboa, Projecto Minerva - Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

MORIN (Edgar), 1984, *Sociologia*, Lisboa, Publicações Europa América.

NÓVOA (António), FINGER (Matthias) 1988, *O método (auto)biográfico e a formação*, Lisboa, Ministério da Saúde.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1989, *Everybody counts, A Report to the Nation on the future of Mathematics education*, Washington, National Academy Press.

NCTM, 1980, *Agenda para acção*, Lisboa, Associação de Professores de Matemática.

NCTM, 1991, *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática*, Lisboa, Associação dos Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

NOVAIS (A.), CRUZ (N.), 1989, "O ensino das ciências, o desenvolvimento das capacidades metacognitivas e a resolução de problemas". *Revista de Educação*, (3) (1), p. 65-75.

PERKINS (D. N.), SIMMONS (R.), 1988 Patterns of misunderstanding: an integrative model for science, Math and Programming. *Review of Educational Research*, 58(3), p. 303-326.

PERRET - CLERMONT (Anne - Nelly), 1978, *A construção da intelgência pela interacção social*, Lisboa, Socicultur.

PERRET - CLERMONT (Anne - Nelly), NICOLET (Michel), 1988, *Interagir et connaitre*, Fribourg, Delval.

PHILLIPS (John L. Jr.), 1977, *A teoria de Piaget sobre as origens do intelecto*, Rio de Janeiro, Socicultur.

PIAGET (Jean), 1949, *A génese do número na criança*, Conferência realizada em 12 de Fevereiro em Paris

PIAGET (Jean), 1972 a), *Psicologia e epistemologia, para uma teoria do conhecimento*, Lisboa, Dom Quixote.

PIAGET (Jean), 1972 b), *Psicologia e pedagogia*, Rio de Janeiro/São Paulo, Edições Forense.

PIAGET (Jean), 1976, *Seis estudos de Psicologia*, Lisboa, Dom Quixote.

PIAGET (Jean), 1978, *Fazer e compreender*, São Paulo, Edições Melhoramentos/Edições Universidade de São Paulo.

PIAGET (Jean), 1986, *A epistemologia genética*, Lisboa, Moraes.

PIAGET (Jean), INHELDER (Barbel), 1979, *A psicologia da criança do nascimento à adolescência*, Lisboa, Moraes.

PIAGET (Jean), SZEMINSKA (A.), 1971, *A génese do número na criança*, Rio de Janeiro, Zahar Edições.

PINEAU (Gaston), 1987, *Temps et contretemp*, Montréal, Saint-Martin.

PIRES (Isabel Valente), 1977, *Descobrindo a Matemática*, 2 vol., Lisboa, Livraria Bertrand.

PIRES (Isabel Valente), 1980 a), *Operações binárias com números inteiros*, Lisboa, Ministério da Educação - DGEBS.

PIRES (Isabel Valente), 1980 b), *Adição e subtracção*, 2 cad., Lisboa, Ministério da Educação - DGEBS.

PIRES (Isabel Valente), 1983 a), *A numeração*, Lisboa, Ministério da Educação - DGEBS.

PIRES (Isabel Valente), 1983 b), *Medição de grandezas*, Lisboa, Ministério da Educação - DGEBS.

PIRES (Isabel Valente), 1987, *O Acesso ao código simbólico matemático por crianças dos 6 aos 8 anos de idade. Profmat*, (3), p. 99-109, Lisboa, Associação de Professores de Matemática.

PIRES (Isabel Valente), 1992, *Sistema de numeração*, Setúbal, Escola Superior de Educação.

PIRES (Isabel Valente), SEMEDO (Lourdes) INÁCIO (Carlos), 1992, *Resolução de problemas e operações aritméticas*, 2 cad., Setúbal, Escola Superior de Educação/Ministério de Educação de Cabo Verde.

PÓLYA (G.), 1990, *How to solve it*, Harmondsworth, Penguin Books.

PONTE (João Pedro), 1984, *Resolução de, problemas em Matemática*. Evoluta, Nº 2, p. 3-9.

PONTE (João Pedro), 1986, *O computador, um instrumento de educação*, Lisboa, Texto Editora.

PONTE (João Pedro), 1990, Documentos programáticos no ensino da Matemática. *Actas da Profmat 90*, vol I, p. 1-10, Lisboa, Associação dos Professores de Matemática.

PONTE (João Pedro), MATOS (João Filipe), 1991, *Cognitive processes and social interactions in mathematical investigations*. Comunicação apresentada no encontro Information Technology and Mathematical Problem Solving Research, Viana do Castelo.

POPPER (Karl R.), 1988, *O universo aberto: Argumentos a favor do indeterminismo*, Lisboa, Dom Quixote.

POPPER (Karl R.), 1989, *Em busca de um mundo melhor*, Lisboa, Fragmentos.

PORTUGAL (Ministério da Educação), 1990, *Ensino Básico, Programa do 1º Ciclo*, Lisboa, Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário.

PUTT (I.J.), 1978, *An exploratory investigation of two methods of instruction in mathematical problem solving at the fifth grade level*, Unpublished doctoral dissertation, Indiana University.

REGLIN (Gary), 1989, Effects of computer-assisted instruction on Mathematics and locus of control. *Journal of Educational Technology Systems*, vol 18(2), p. 143-149.

ROGERS (Carl R.), 1985, *Tornar-se pessoa*, Lisboa, Moraes.

ROMBERG (Thomas), CARPENTER (Thomas), 1986, Research or teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry. *Handbook of Research on Teaching*, New York, Macmillan Publishing Company / London, Colhier Macmillan Publishers, p. 850-873.

ROSNAY (Joel de), 1977, *O macroscópio. Para uma visão global*, Lisboa, Arcádia.

SALJO (R.), WYNDHAMN (J.), 1988, Cognitive operations and educational framing of tasks: school as context for arithmetic thought. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 32(2), p. 61-71.

SCHLIEMANN (Analúcia Dias), ACIOLY (Nadja Maria), 1989, Numbers and operations in everyday problem-solving. *Mathematics, Education and Society*, ed. Christine Keil, Paris, Unesco, p. 126-128.

SCHOENFELD (Alan H.), 1980, Problem solving in school mathematics. *Problem solving in school mathematics*, Reys (ed.), Reston, NCTM.

SCHOENFELD (Alan H.), 1983, *Problem solving in the mathematics curriculum: A report, recommendations, and an annotated bibliography*, The Mathematical Association of America.

SCHOENFELD (Alan H.), 1985, *Mathematical problem solving*, New York, Academic Press.

SILVER (Edward), SHAPIRO (Lora), DEUTSCH (Adam), 1991, *Sense-making and the solution of division problems involving remainders: an examination of students' solution processes and their interpretations of solutions*, comunicação apresentada no encontro Information Technology and Mathematical Problem Solving Research, Viana do Castelo.

SINCLAIR (Robert), DAVIES (Don) e outros, 1983, *For every school a community: expanding environments for learning*, Boston Institute for Responsive Education.

SNAPPER (Ernest), 1979, The three crisis in Mathematics: Logicism, Intuitionism and Formalism. *Mathematics Magazine*, 52(4), p. 207-216.

SPEARMAN (C.), 1923, *The nature of intelligence and the principles of cognition*, London, MacMillan.

STEFFE (L. P.), 1983, The Teaching experiment methodology in a constructivist research program. *Proceedings of 4th International Congress on Mathematical Education*, M Zweng et al. (eds.), Birkhauser, Boston.

STENGEL (A.), LEBLANC (J.), JACOBSON (M.), LESTER (F.), 1977, *Learning to solve problems by solving problems*, Mathematical Problem Solving Project, Bloomington, Mathematics Education Development Center.

TAVARES (José), ALARCÃO (Isabel), 1989, *Psicologia do desenvolvimento e da aprendizagem*, Coimbra, Almedina.

UNESCO, 1976, *O educador e a abordagem sistémica*, Lisboa, Estampa.

VERGNAUD (Gérard), 1981, *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne, Peter Lang.

VERGNAUD (Gérard), 1990, Epistemology and Psychology of Mathematics Education in *Mathematics and cognition*, ed. Pearla Nesher and Jeremy Kilpatrick, Cambridge, Cambridge University Press, p. 14-30.

VYGOTSKY (L.S.), 1988, *A formação social da mente*, São Paulo, Martins Fontes.

VYGOTSKY (L.S.), 1989, *Pensamento e linguagem*, São Paulo, Martins Fontes.

WEBB (N.L.), CHARLES (R.I.), 1977, *Module development and formative evaluation*. Mathematical Problem Solving Project, Bloomington, Mathematic Education Development Center.

WEINSTEIN (Claire E.), MAYER (Richard E.), 1986, The teaching of learning strategies. *Handbook of Research on Teaching*, New York, Macmillan Publishing Company / London, Collier Macmillan Publishers.

ÍNDICE DE AUTORES

ÍNDICE TEMÁTICO

ANEXO I

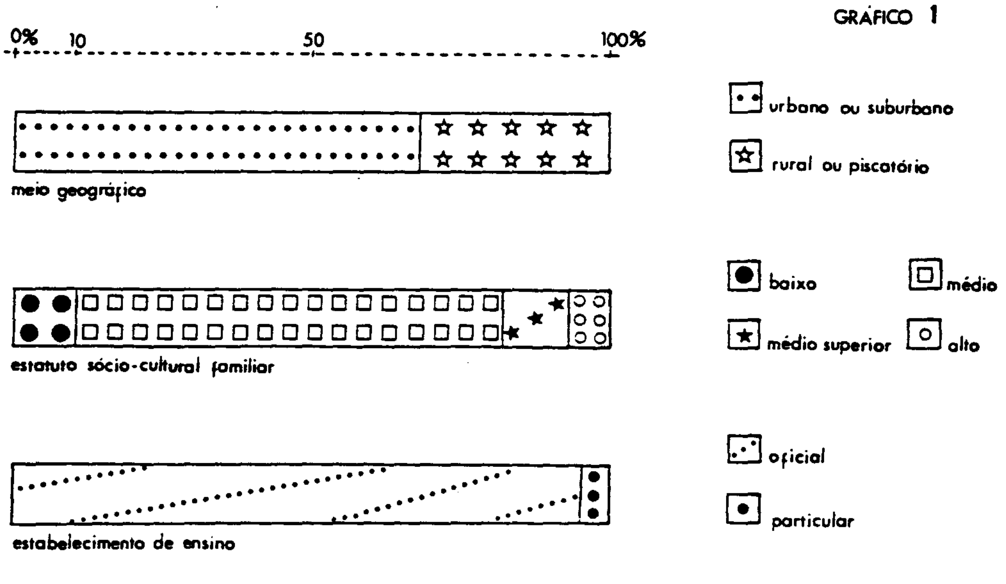
ELEMENTOS DO PROJECTO «ENSINAR É INVESTIGAR»

QUADRO A
Características ambientais da amostra

variáveis / grupos	MEIO GEOGRÁFICO				MEIO SOCIO-CULTURAL FAMILIAR								ESTABELECIMENTO DE ENSINO			
	urbano ou suburbano		rural ou piscatório		baixo		médio		médio superior		alto		oficial		particular	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
A	—	—	12	4,7	2	0,8	10	3,9	0	0,0	0	0,0	12	4,8	—	—
B	20	7,8	—	—	2	0,8	18	7,1	0	0,0	0	0,0	20	7,8	—	—
C																
D	29	11,4	—	—	0	0,0	21	8,2	6	2,4	2	0,8	29	11,4	—	—
E	22	8,6	—	—	2	0,8	19	7,4	1	0,4	0	0,0	22	8,6	—	—
F	—	—	11	4,3	4	1,6	7	2,7	0	0,0	0	0,0	11	4,3	—	—
G																
H	28	11,0	—	—	6	2,4	17	6,7	2	0,8	3	1,2	28	11,0	—	—
I	21	8,2	—	—	1	0,4	17	6,7	1	0,4	2	0,8	21	8,2	—	—
J	11	4,3	—	—	0	0,0	1	0,4	2	0,8	8	3,1	—	—	11	4,3
L	25	9,8	—	—	3	1,2	17	6,7	5	2,0	0	0,0	25	9,8	—	—
M	—	—	25	9,8	1	0,4	20	7,8	3	1,2	1	0,4	25	9,8	—	—
N	—	—	8	3,1	1	0,4	7	2,7	0	0,0	0	0,0	8	3,1	—	—
O	17	6,7	—	—	2	0,8	11	4,3	3	1,2	1	0,4	17	6,7	—	—
P	—	—	26	10,2	3	1,2	18	7,1	5	2,0	0	0,0	26	10,2	—	—
TOTAL	173	67,8	82	32,1	27	10,6	183	71,8	28	11,0	17	6,6	244	95,7	11	4,3

FONTE: inquérito aos professores

GRÁFICO 1



QUADRO B

Características individuais dos sujeitos da amostra

grupos \ variáveis	IDADE								SEXO				PRÉ-ESCOLARIZAÇÃO			
	<9 anos		>9 anos <10anos		>10anos <11anos		>11 anos		feminino		masculino		não		sim	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
A	0	0,0	10	3,9	2	0,8	0	0,0	7	2,7	5	2,0	12	4,8	0	0,0
B	0	0,0	15	5,8	3	1,2	2	0,8	6	2,4	14	5,5	18	7,1	2	0,8
C																
D	2	0,8	24	9,4	3	1,2	0	0,0	10	3,9	19	7,5	9	3,5	20	7,8
E	3	1,2	12	4,7	3	1,2	4	1,6	13	5,1	9	3,5	14	5,5	8	3,1
F	0	0,0	1	0,4	6	2,3	4	1,6	7	2,7	4	1,5	9	3,5	2	0,8
G																
H	5	1,9	16	6,3	3	1,2	4	1,6	12	4,8	16	6,3	13	5,1	15	5,9
I	3	1,2	15	5,8	2	0,8	1	0,4	12	4,8	9	3,5	18	7,1	3	1,2
J	1	0,4	10	3,9	0	0,0	0	0,0	4	1,5	7	2,7	11	4,3	0	0,0
L	0	0,0	25	9,8	0	0,0	0	0,0	14	5,5	11	4,3	20	7,8	5	2,0
M	7	2,7	18	7,1	0	0,0	0	0,0	14	5,5	11	4,3	14	5,5	11	4,3
N	0	0,0	8	3,1	0	0,0	0	0,0	4	1,5	4	1,5	8	3,1	0	0,0
O	2	0,8	12	4,7	3	1,2	0	0,0	12	4,7	5	2,0	10	3,9	7	2,7
P	1	0,4	22	8,6	3	1,2	0	0,0	13	5,1	13	5,1	17	6,6	9	3,5
TOTAL	24	9,4	188	73,7	28	11,0	15	5,9	128	50,2	127	49,8	173	67,8	82	32,2

FONTE:

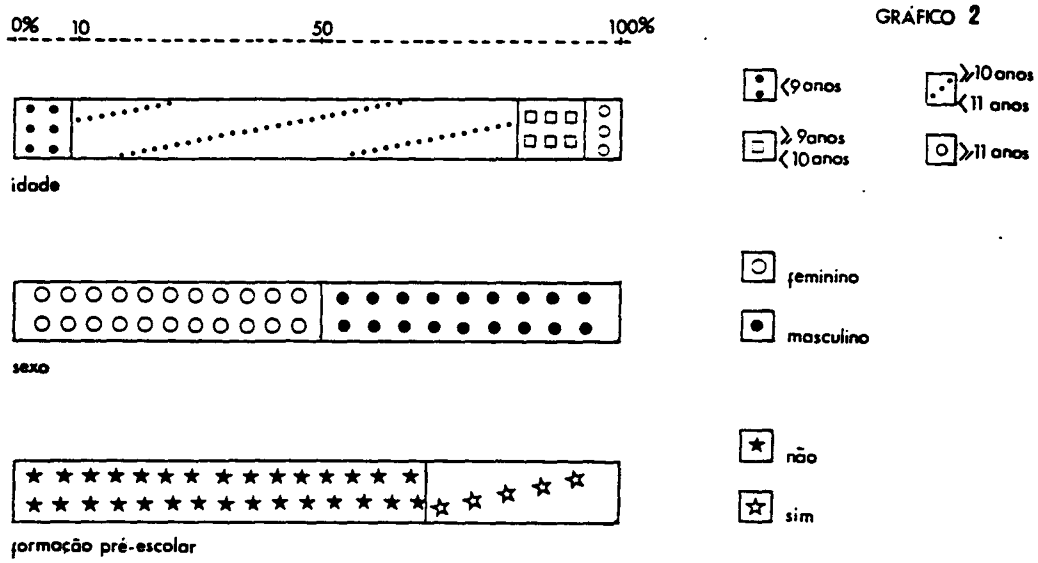


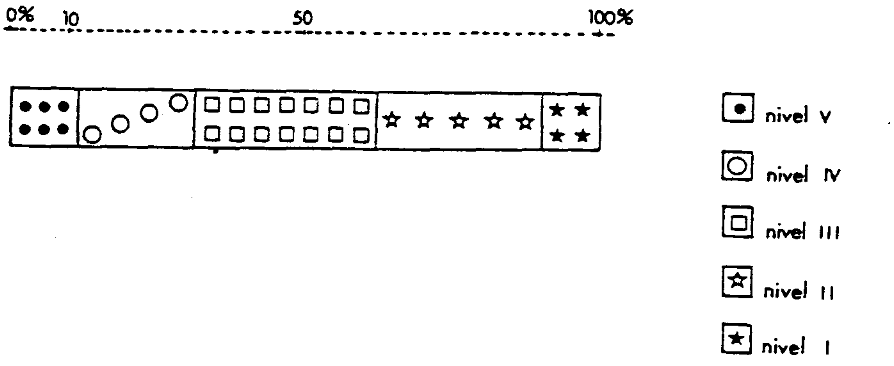
GRÁFICO 2

QUADRO C

Níveis de factor g dos sujeitos da amostra matrizes coloridas de RAVEN (CPM-PM47)

níveis / GRUPO	NIVEL V		NIVEL IV		NIVEL III		NIVEL II		NIVEL I	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
A	1	0,4	3	1,2	5	2,0	3	1,2	0	0,0
B	1	0,4	6	2,4	5	2,0	4	1,6	1	0,4
C	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
D	2	0,8	3	1,2	8	3,2	11	4,4	4	1,6
E	1	0,4	9	3,6	6	2,4	4	1,6	1	0,4
F	3	1,2	2	0,8	3	1,2	2	0,8	0	0,0
G	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
H	4	1,6	6	2,4	10	4,0	6	2,4	2	0,8
I	2	0,8	1	0,4	9	3,6	6	2,4	3	1,2
J	0	0,0	0	0,0	4	1,6	4	1,6	3	1,2
L	3	1,2	4	1,6	7	2,8	6	2,4	5	2,0
M	3	1,2	4	1,6	7	2,8	9	3,6	2	0,8
N	1	0,4	2	0,8	4	1,6	1	0,4	0	0,0
O	2	0,8	5	2,0	3	1,2	6	2,4	1	0,4
P	4	1,6	5	2,0	8	3,2	6	2,4	3	1,2
TOTAL	27	10,8	50	20,1	79	31,7	68	27,3	25	10,1

GRÁFICO 3



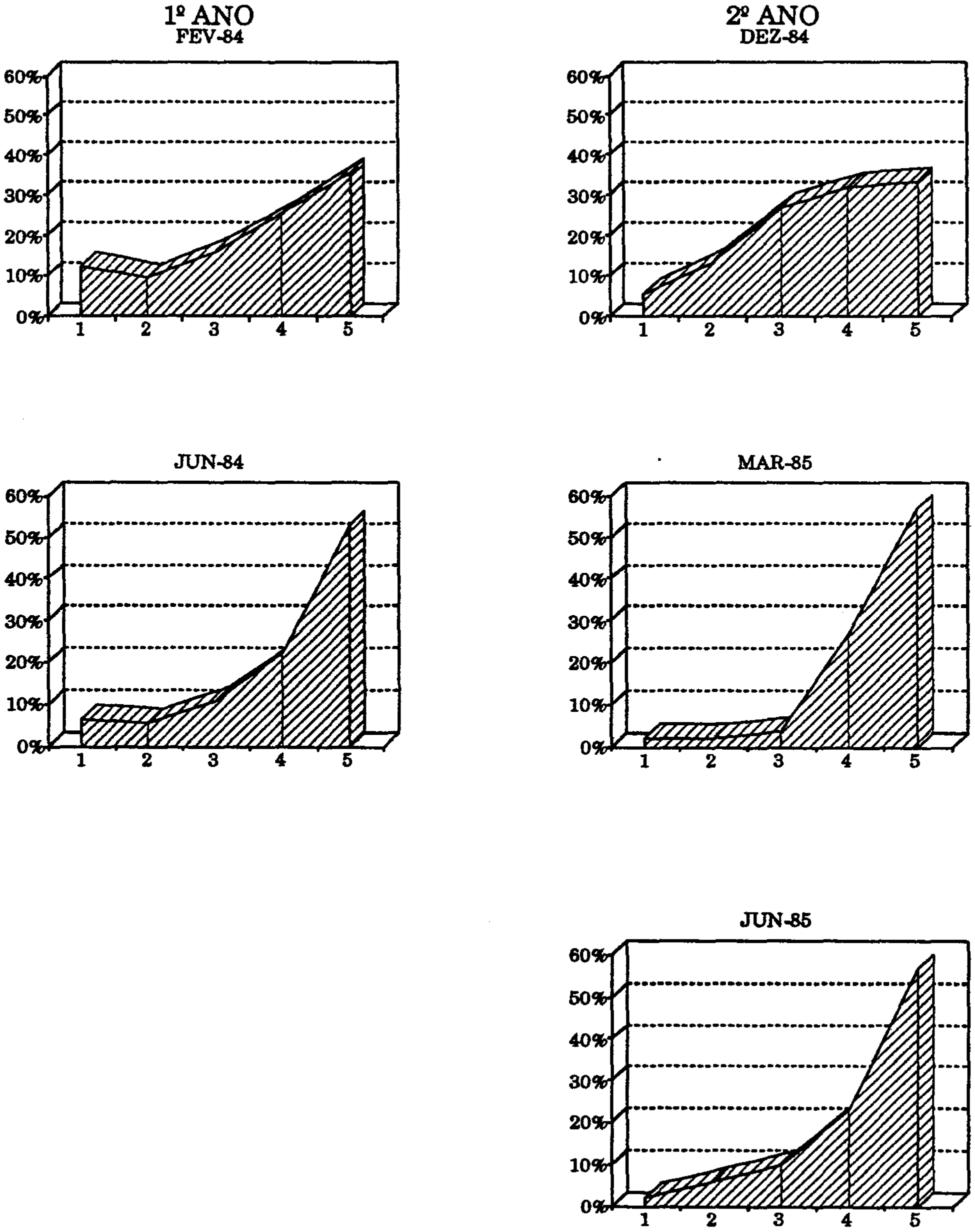


Figura I.1 - Distribuição da frequência das classificações dos testes de Matemática dos dois primeiros anos

(cont.)

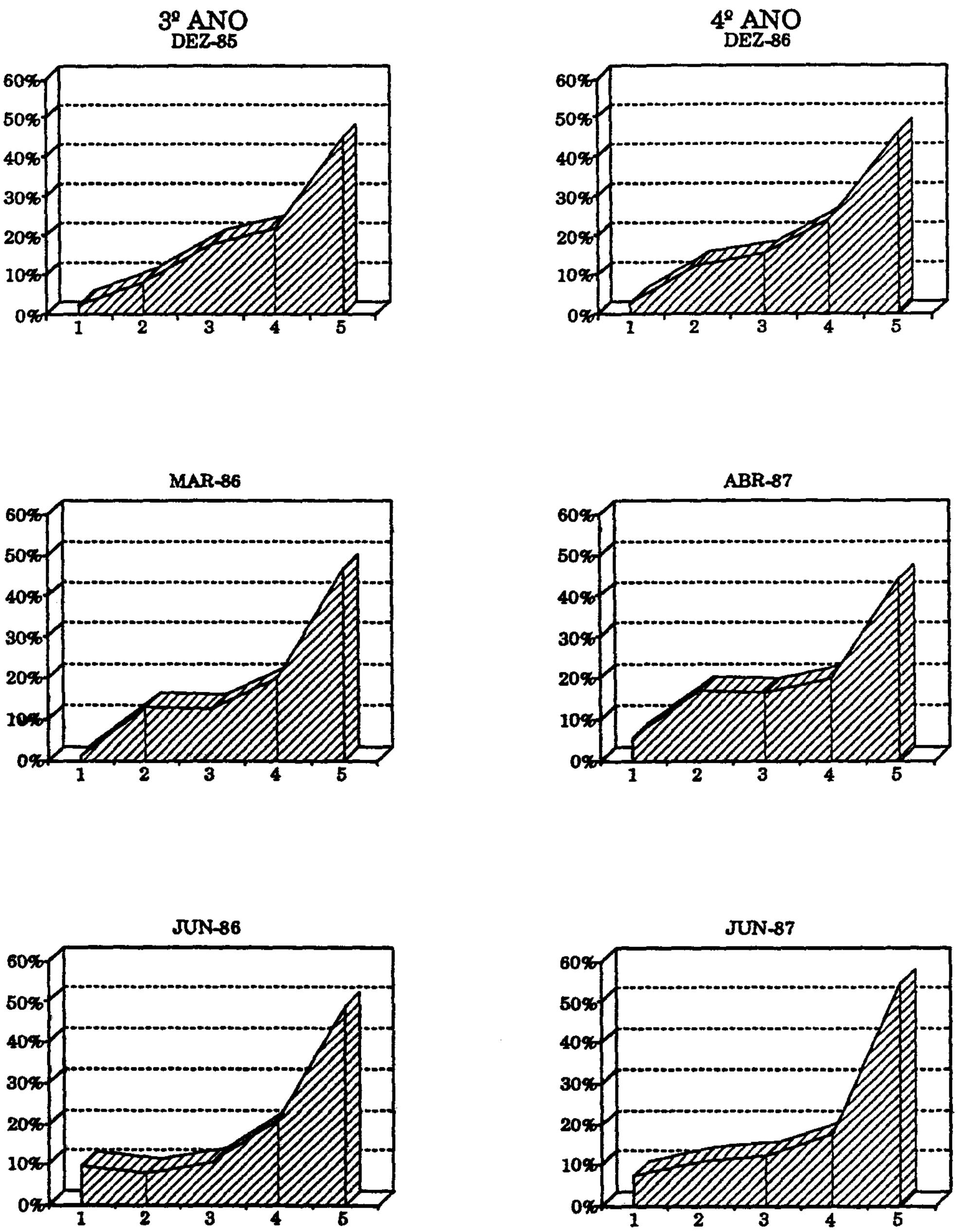


Figura I.3 - Distribuição da frequência das classificações dos testes de Matemática dos dois últimos anos

ANEXO II

TESTE DO FINAL DO 1º ANO DE ESCOLARIDADE

TESTE C - Domínio das OPERAÇÕES

* Objectivos / Conceitos
* Descrição do teste
* Instruções para aplicação do teste
* Escala de avaliação

(Enviar na 3ª semana de Junho/84)

OBJECTIVOS

1. resolver problemas que envolvam as operações de adição, de subtracção e, eventualmente, de multiplicação, com registo do processo - esquema gráfico, ou indicação da operação, ou ambos - e do resultado obtido;
2. calcular o valor de expressões numéricas;
3. identificar figuras geométricas;
4. ordenar, por tamanhos, figuras geométricas dadas;
5. efectuar adições sucessivas da mesma quantidade, a partir do zero e até onde cada aluno o desejar. O processo de registo das somas será também da escolha da criança.

CONCEITOS

1. adição/soma; "operador aditivo";
2. subtracção/resto;
3. multiplicação;
4. "figura geométrica"; quadrado; círculo; triângulo; rectângulo;
5. à esquerda / à direita / no meio de ...
6. o maior / o menor / o de tamanho médio;
7. antes / depois / agora

DESCRIÇÃO

O teste C é constituído por sete itens integrados em duas partes. A PARTE A consta de três problemas - item 1, item 2, item 3, , e cinco expressões numéricas - item 4. A PARTE B é constituída por um exercício de identificação de figuras geométricas - item 5, de orientação espacial e de ordenação - item 6 e por um exercício de cálculo - item 7.

PARTE A

PROBLEMAS ITEM 1

1. O Zé tinha 10 livros.
   No dia dos anos deram-lhe 5 livros.
   O Zé resolveu então dar 2 livros, que já tinha lido, para a biblioteca da sua escola
   Quantos livros tem agora o Zé ?

ITEM 2

2. A Mãe pediu à Ana para ir apanhar flores para as jarras.
   Ela apanhou 7 rosas brancas, 3 rosas cor de laranja, 5 rosas vermelhas e 4 cravos brancos.
   Quantas rosas apanhou a Ana ?

ITEM 3

3. Quantas rodas há em 5 bicicletas ?

Expressões numéricas ITEM 4

$4 + 2 - 5 =$

$16 - 6 =$

$9 - 2 + 7 =$

$10 + 4 - 3 =$

$6 + 6 - 2 =$

$5 + 7 + 5 =$

PARTE B

ITEM 5

5. Pintar todos os círculos - folha 5

ITEM 6

6. Recortar os quadrados e colá-los numa folha de papel, colocando à esquerda o maior dos quadrados, à direita o menor e no meio dos dois o quadrado de tamanho médio - folha 6

ITEM 7

7. Efectuar somas sucessivas de "+5" a partir do número zero e até onde cada criança o desejar.

INSTRUÇÕES PARA APLICAÇÃO DO TESTE

1. INSTRUÇÕES GERAIS

Os exercícios devem ser realizados em dois dias diferentes: a PARTE A num dia e a PARTE B, num outro - ver MAPA 1. Calendário. Recomenda-se de novo que se procure afastar as crianças umas das outras para que não façam estes trabalhos em conjunto, uma vez que o seu objectivo é a avaliação.

2. INSTRUÇÕES ESPECÍFICAS

PARTE A

Diga o primeiro problema duas vezes, recomendando que nenhuma criança proclame alto o resultado.

As crianças devem registar numa folha de papel liso A4 o processo pelo qual resolveram o problema (esquema gráfico, ou a indicação de operação ou ambos) e o resultado obtido.

Deve dar-se-lhes toda a liberdade para que façam os seus registos como entenderem, pedindo-se apenas que separem entre si os diversos problemas.

Devem ser completamente livres para recorrerem a material de contagem para manuseamento e, nesse caso, o professor DEVERÁ ANOTAR O FACTO na folha em que a criança está a fazer o exercício. Não devem utilizar os dedos para manusear. Este manuseamento não vai, de forma nenhuma influir na avaliação de cada criança, mas constitui um dado importante para a experiência.

As crianças que não fazem ainda esquema gráfico nem indicação da operação, isto é, que resolvem problemas utilizando apenas o manuseamento

de material de contagem, só devem indicar na folha de registo o resultado obtido.

Quando todos os alunos tiverem acabado de fazer o primeiro problema, o professor dirá o segundo. Da mesma forma para o terceiro problema.

De seguida, isto é, após os alunos terem resolvido os três problemas, deve escrever as expressões numéricas no quadro e pedir-lhes para que as passem para a folha de papel e as resolvam.

PARTE B

A folha onde estão desenhadas as figuras geométricas, e que se inclui a seguir, deverá ser cortada em duas partes: a parte designada por (5) e a que foi designada por (6) - segue um exemplar para cada criança.

Entregue a parte (5) e peçam aos alunos que pintem todos os círculos.

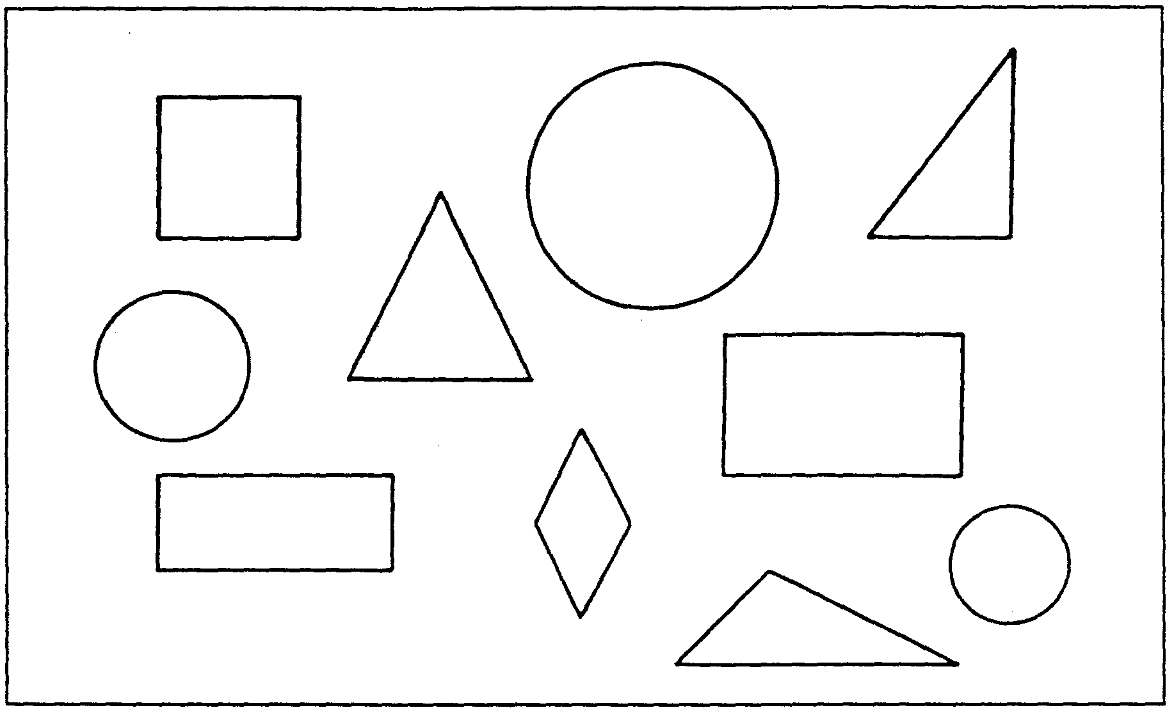
Após terminada essa tarefa, entregue-lhes a outra parte da folha (6) e peça-lhes para recortarem os quadrados e os colarem numa outra folha, colocando à sua esquerda o maior dos quadrados, à direita o menor e no meio dos dois o quadrado de tamanho médio.

Finalmente peça aos alunos que efectuem adições sucessivas de "+5" até onde desejarem, a partir do número zero.

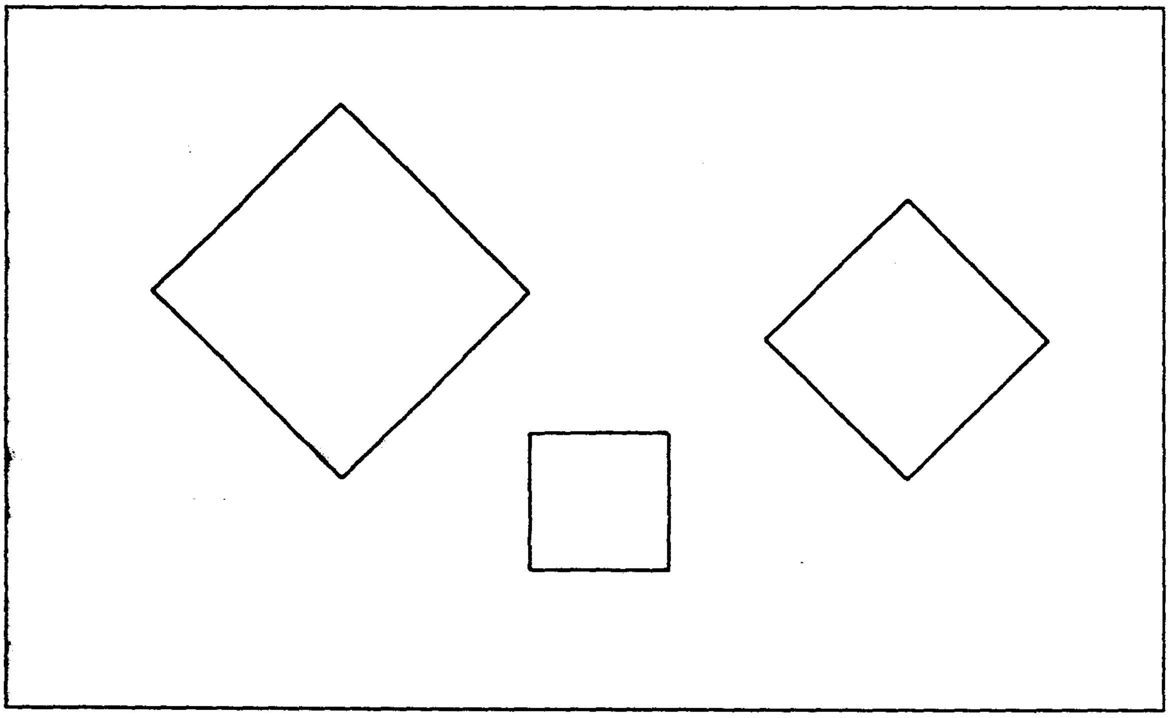
NOTA IMPORTANTE

No caso de um, ou mais alunos, não realizar o teste, ou qualquer um dos seus itens, envie-nos a respectiva folha com indicação das razões desse facto.

5



6



ESCALA DE AVALIAÇÃO

ITEM	CATEGORIAS DESCRITIVAS VERBAIS	CLASSIFICAÇÕES
1,2,3	- Resolução do problema com indicação da operação (com, ou sem, manuseamento e esquema gráfico)	11 pontos
4	- Cálculo do valor de cada expressão numérica	4 pontos
5	- Identificação dos três círculos	9 pontos
6	- Colagem correcta dos três quadrados	9 pontos
7	- Cálculo das somas até 10	5 pontos
	- Cálculo das somas até 20	5 pontos
	- Cálculo das somas até 40	5 pontos
	- Cálculo das somas até 60	5 pontos
	- Cálculo das somas até 100 ou mais	5 pontos

NOTA: descontar 2 pontos por cada cálculo errado

ANEXO III

ENUNCIADOS DE PROBLEMAS

PROBLEMAS DO PRIMEIRO TESTE DO 1º ANO

1 4 meninos estavam jogar à bola. Outros 3 meninos foram jogar com eles.
Quantos meninos jogaram à bola?

2 O João Pedro tinha 6 berlindes. Perdeu 2.
Quantos berlindes tem agora o João Pedro?

3 No recreio, estavam 7 meninos da aula da Luísa a jogar à "apanhada", 5 meninos a jogar à "macaca" e 3 a saltar à corda.
Quantos meninos da aula da Luísa estavam a brincar?

PROBLEMAS DO TESTE FINAL DO 1º ANO

Encontram-se no Anexo II

PROBLEMAS DO TESTE FINAL DO 2º ANO

1 Para que todos os meninos de uma escola possam beber um pacotinho de leite, a cantina recebe todos os dias três embalagens com 24 pacotinhos cada.
Quantos meninos tem a escola?

2 O Luís foi à loja comprar um caderno e um lápis

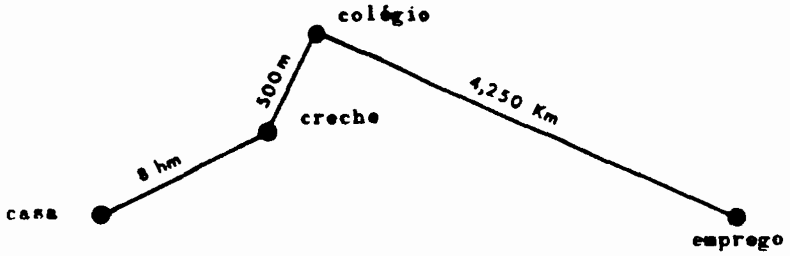
Preços:	Caderno	50 Escudos
	Lápis	20 Escudos

Pagou com uma nota de 100 Escudos
Quanto recebeu de troco?

3 Na biblioteca da aula da Teresa há 24 livros.
Para as férias grandes a professora distribuí-os todos, dando 3 livros a cada aluno.
Quantos alunos levaram livros?

PROBLEMAS DO TESTE FINAL DO 3º ANO

1

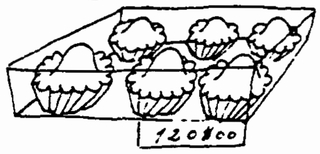


Este desenho representa o caminho que a Mãe da Maria faz todas as manhãs de automóvel.

Ela vai à creche deixar o bébé, depois ao colégio deixar a Maria e finalmente vai para o seu emprego.

Quantos kilómetros percorre ela todas as manhãs?

2 A tia Luísa comprou, na terça-feira, uma embalagem com 6 queques.



Ontem comprou duas embalagens, cada uma com 2 queques

Quais os queques que foram mais baratos?

3 O Filipe tem 30 berlindes

0,1 são brancos

Quantos berlindes brancos tem o Filipe?

PROBLEMAS DO TESTE FINAL DO 4º ANO

1 O Pedro foi à mercearia e à padaria fazer compras.
Levou uma nota de 500$00

ao apresentar as contas à Mãe, entregou o papel com a despesa da mercearia

	95$00
	18$50
	47$50
	47$50
	47$50
	120$00
Total	376$00

Mas não se lembrava de quanto tinha pago na padaria.
O Troco era: 1 moeda de 50$00
1 moeda de 5$00
Quanto gastou o Pedro na padaria?

2 A Mãe comprou 1 kg de cerejas numa loja por 135$00.
A Tia Ana comprou 750 gr de cerejas noutra loja por 90$00.
Qual das duas comprou as cerejas mais baratas?

3 O Luís vai passar todo o mês de Agosto à praia e quer comprar um papagaio para brincar.

O papagaio custa 200$00 e ele não tem dinheiro nenhum.

Então ele pensou: "Hoje é dia 8 de Maio. Vou pedir à minha Mãe que me deixe fazer um recado todos os dias e me pague 2$50 por cada um".

Achas que por este processo o Luís vai conseguir o dinheiro necessário para levar o papagaio para a praia?

ANEXO IV

TRABALHOS DOS ALUNOS

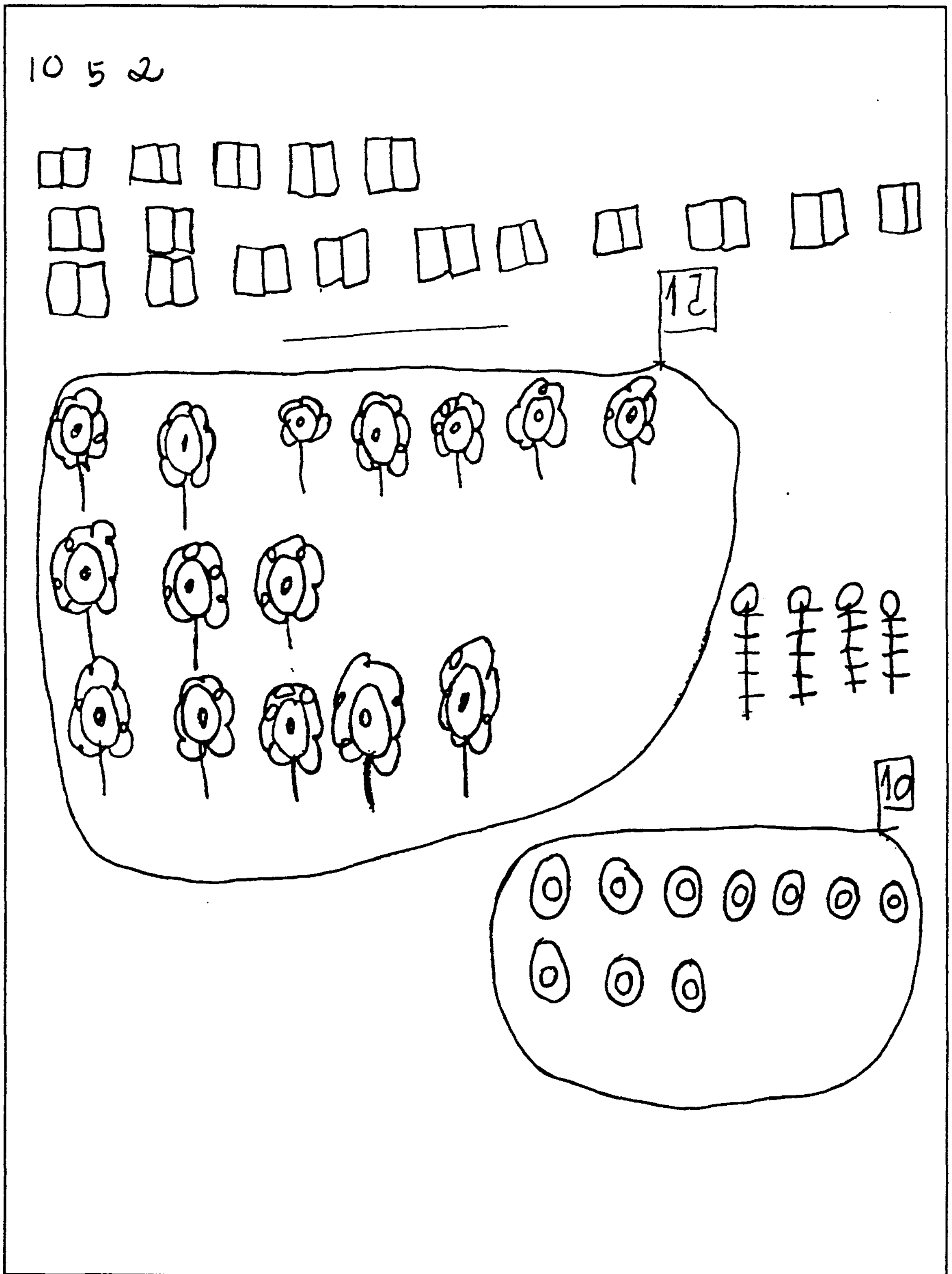
Pegou em tampas de garrafas
contou com dificuldade até 10, foi
buscar mais cinco que contou com
facilidade, tirou duas e contou
até 13 mas não sabia escrever
o número.

# Aluno B21*	# 6 anos 11 meses	# Junho 1º Ano

Exemplo 1

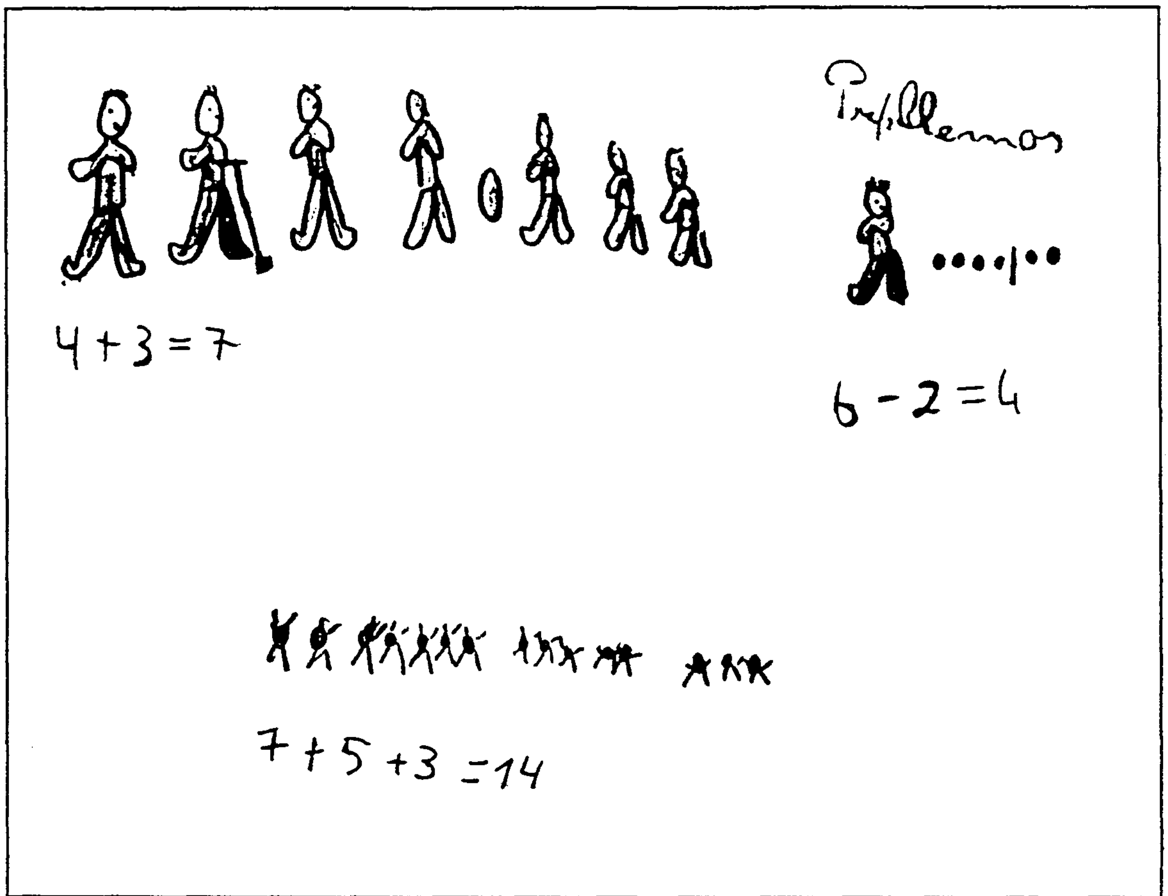
---

* O nome do aluno não é mencionado podendo no entanto ser consultado nos arquivos do Projecto «Ensinar é Investigar» - Instituto de Inovação Educacional



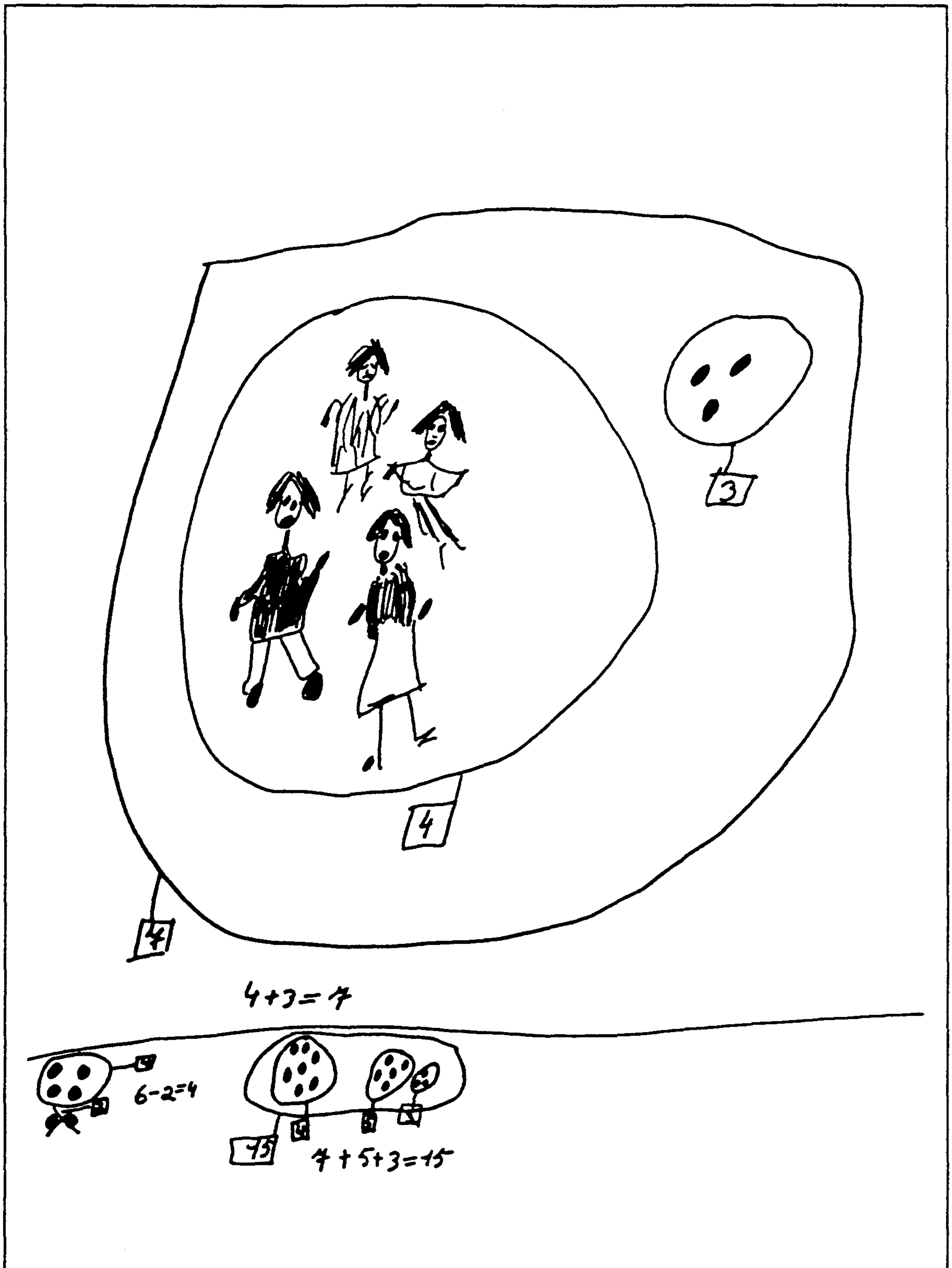
Aluno D19* # 6 anos 9 meses # Junho 1º Ano

Exemplo 2



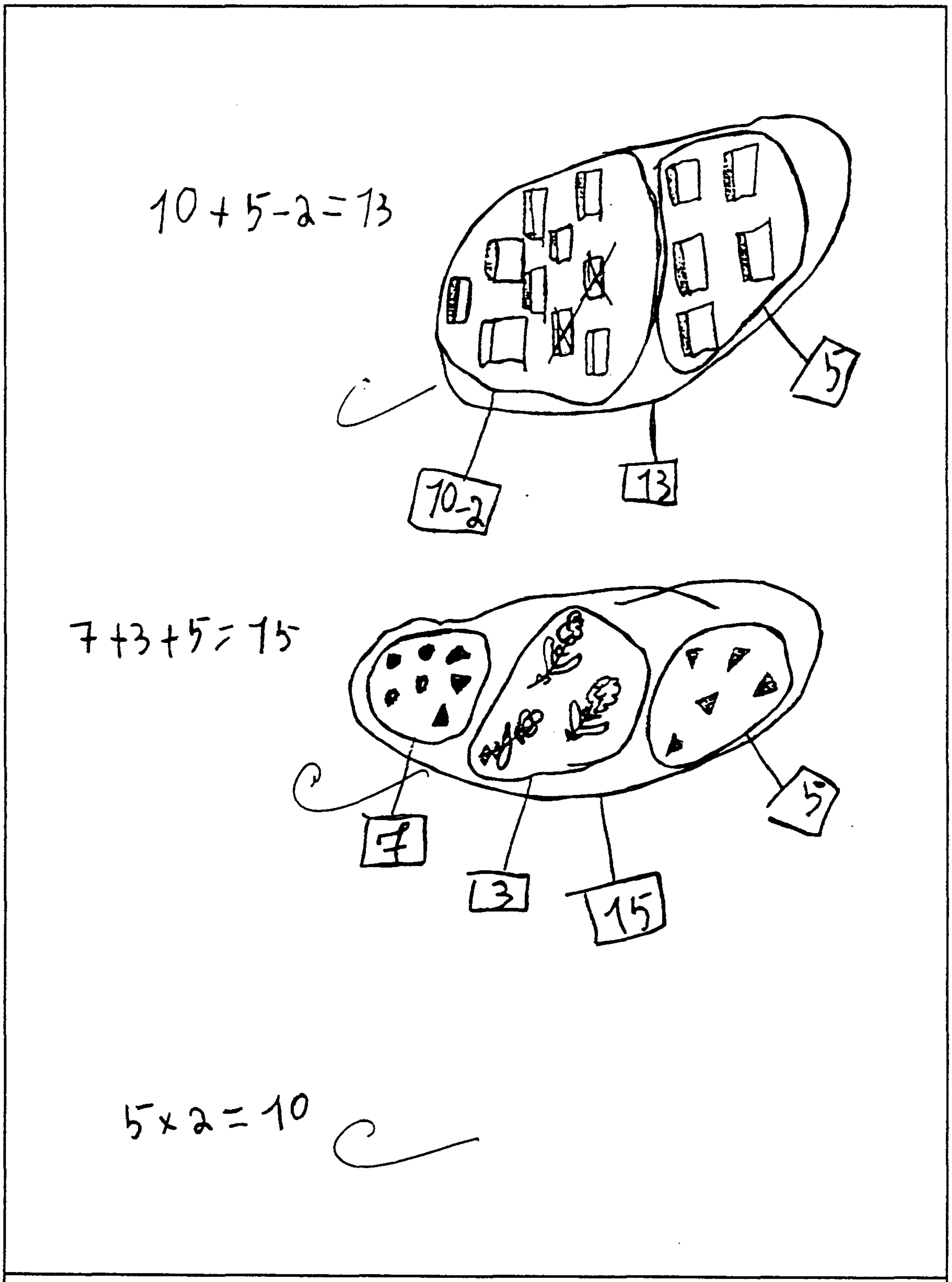
# Aluno I9*	# 6 anos 9 meses	# Fevereiro 1º Ano

Exemplo 3



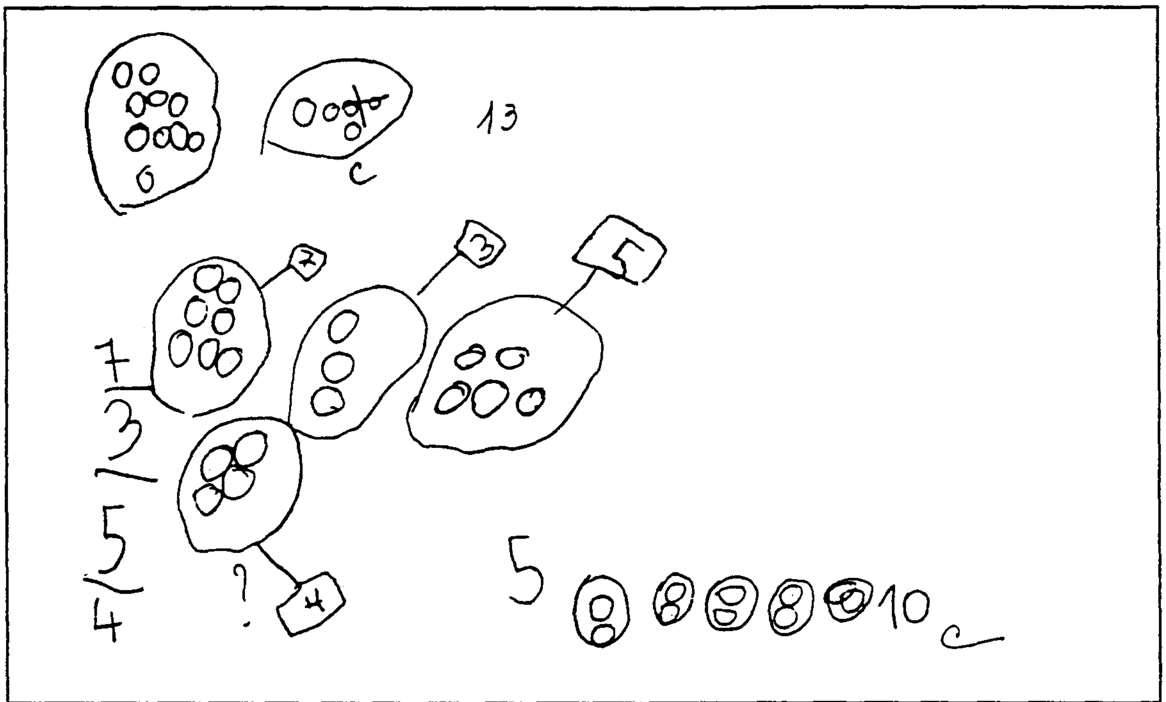
# Aluno L17*	# 6 anos 7 meses	# Fevereiro 1º Ano

Exemplo 4



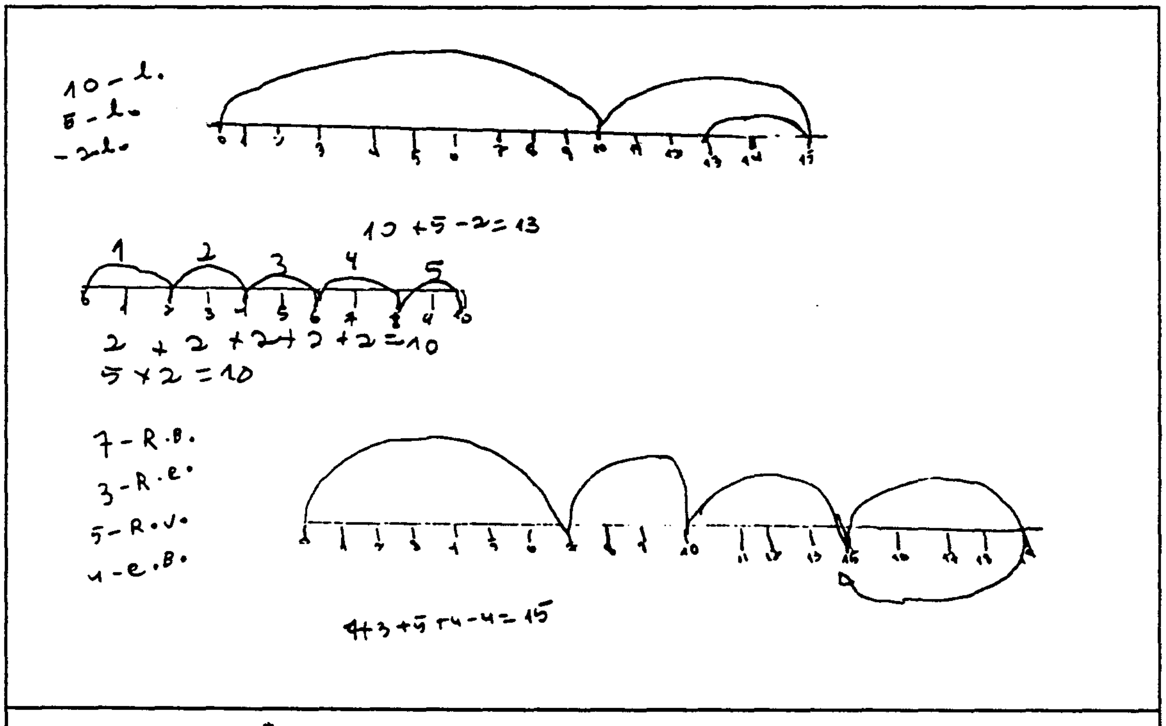
Aluno H13*	# 6 anos 7 meses	# Junho 1º Ano

Exemplo 5



# Aluno H9*	# 6 anos 7 meses	# Junho 1º Ano

Exemplo 6



# Aluno D10*	# 7 anos três meses	# 1º Ano Junho

Exemplo 7

$4+3=7$

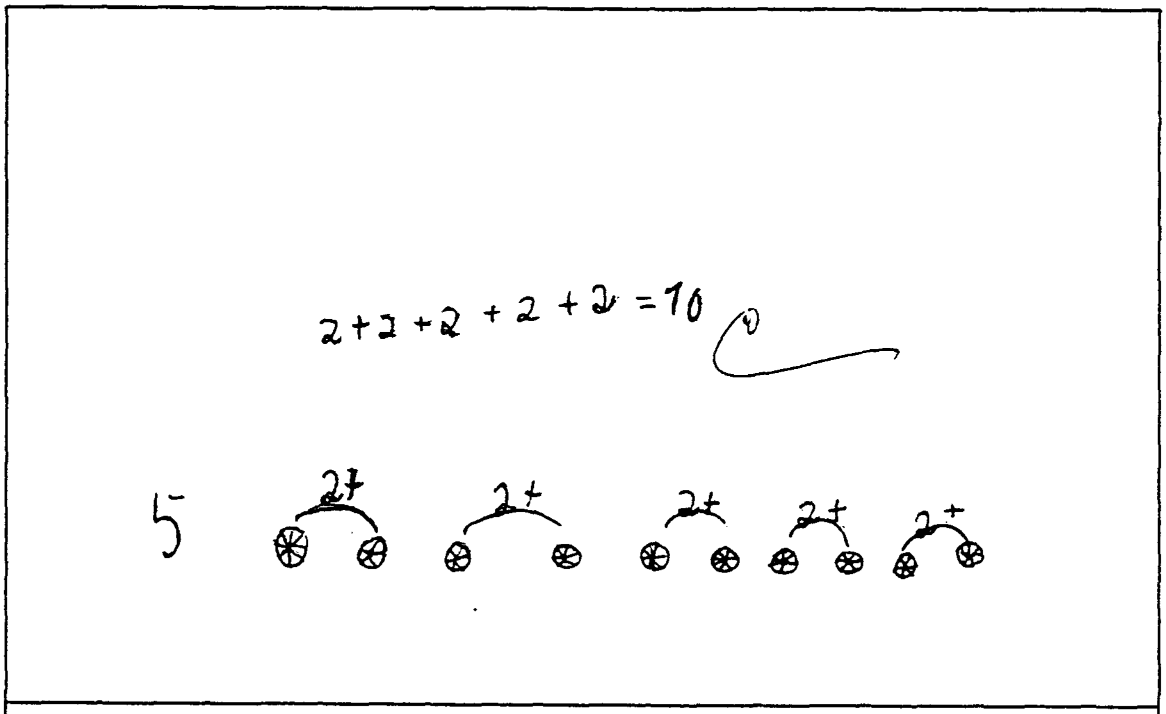
$6\cancel{1}-2=4$

$7+5+3=$

(não sei escrever 15)

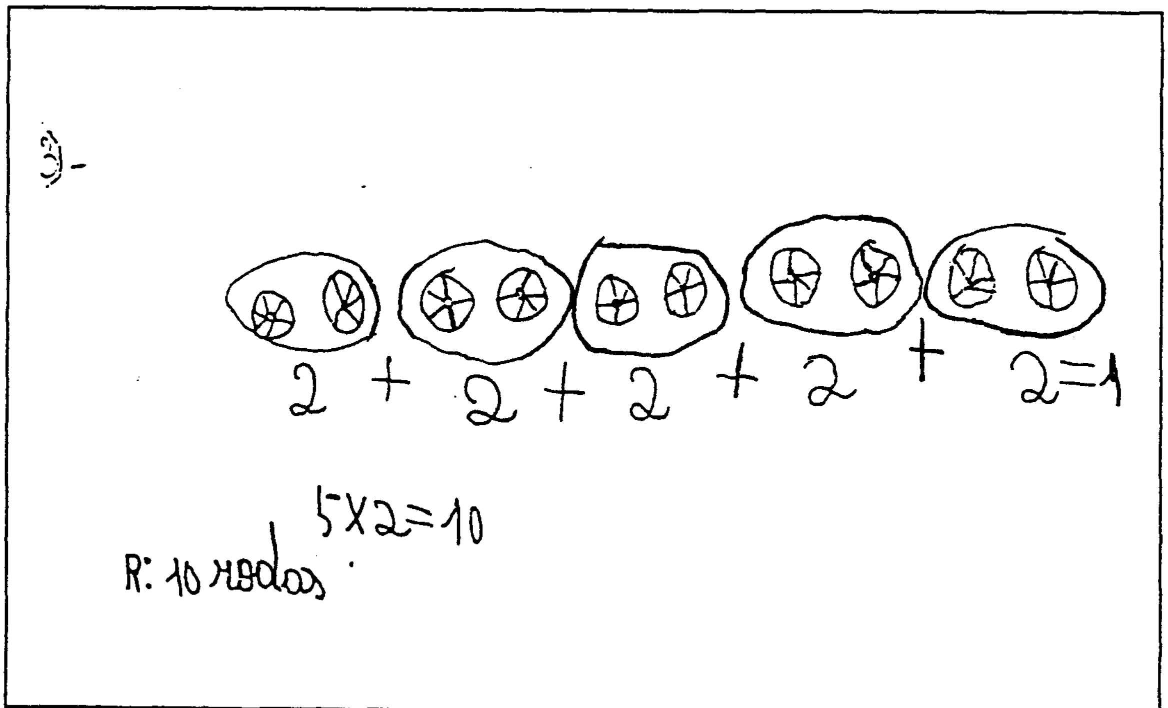
# Aluno L9*	# 6 anos 7 meses	# Fevereiro 1º Ano

Exemplo 8



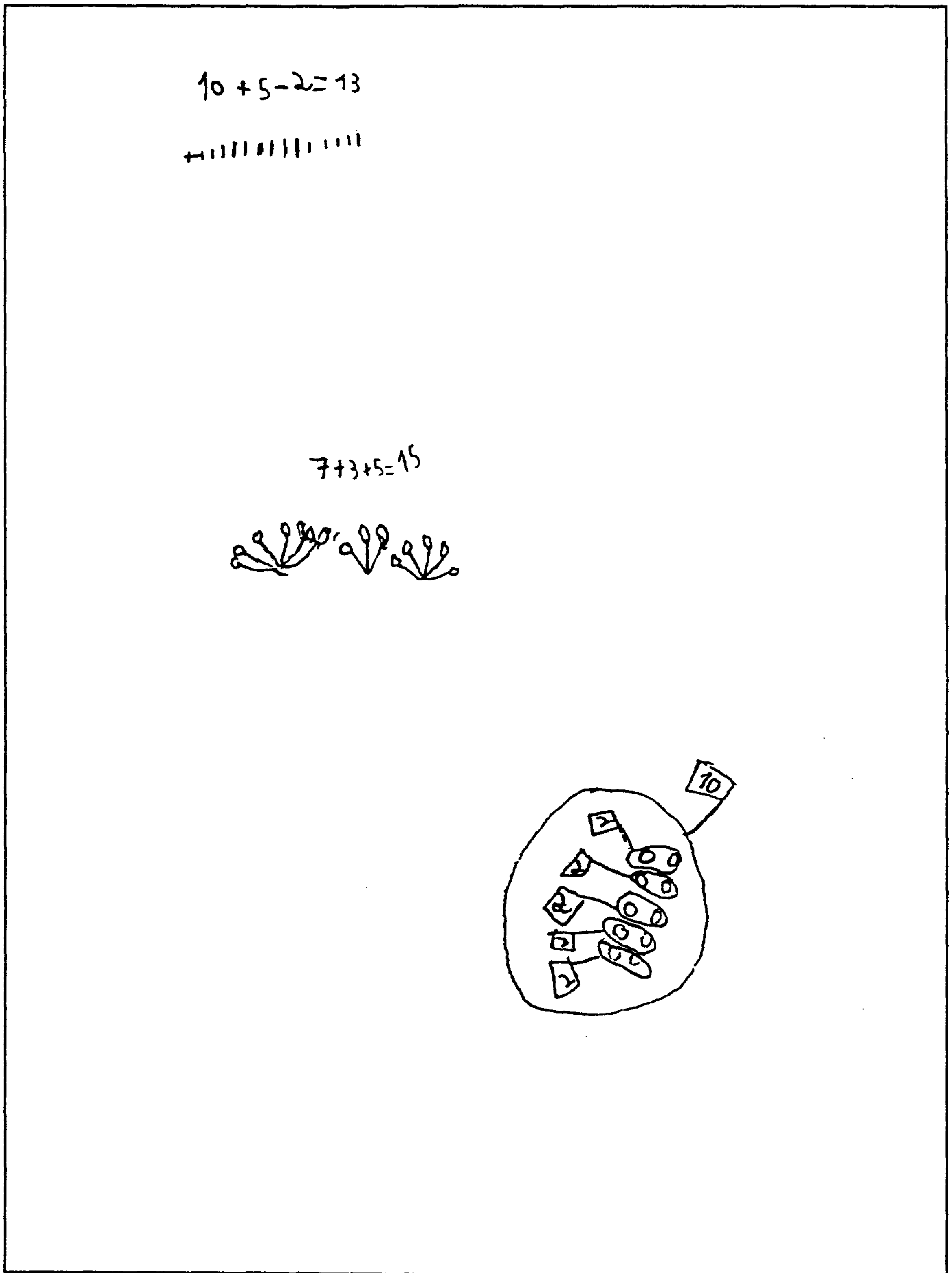
# Aluno H15*	# 6 anos 11 meses	# Junho 1º Ano

Exemplo 9



# Aluno N6*	# 7 anos 4 meses	# Junho 1º Ano

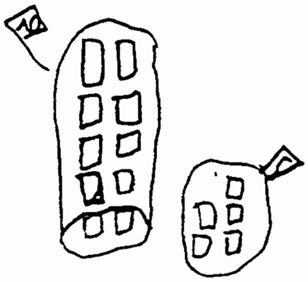
Exemplo 10



# Aluno D23*	# 6 anos 9 meses	# Junho 1º Ano

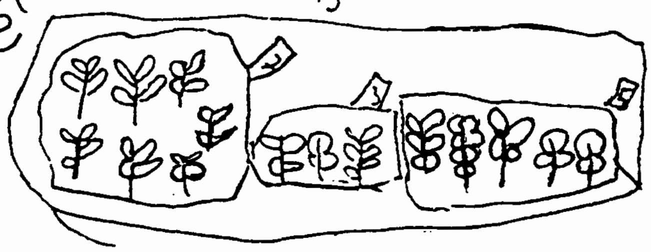
Exemplo 11

10 $10+5-2=13$
5
2



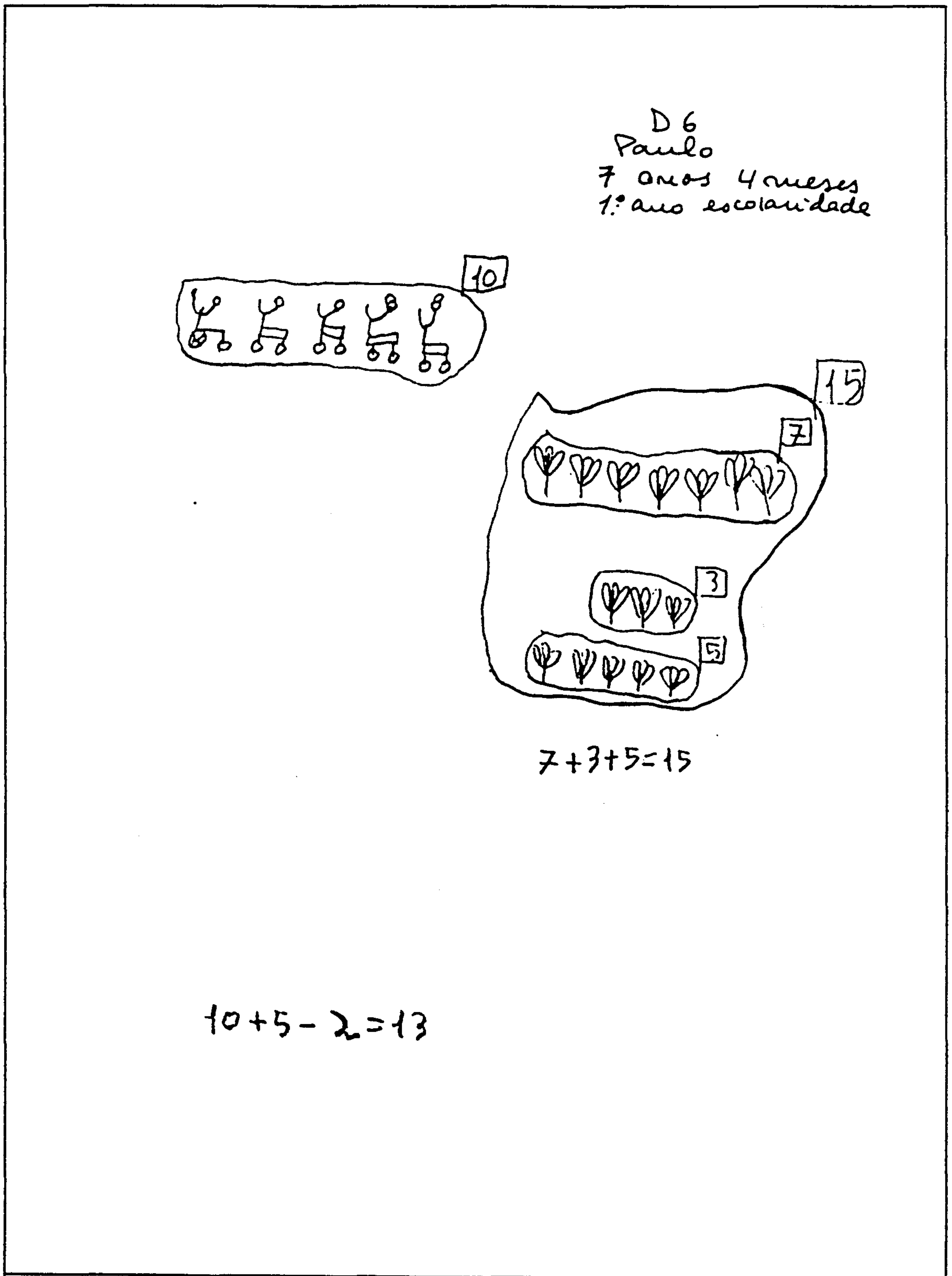
$2+2+2+2+2=10$

7 π
3 π $7+3+5=15$
5 π
4 e



# Aluno D21*	# 6 anos 9 meses	# Junho 1º Ano

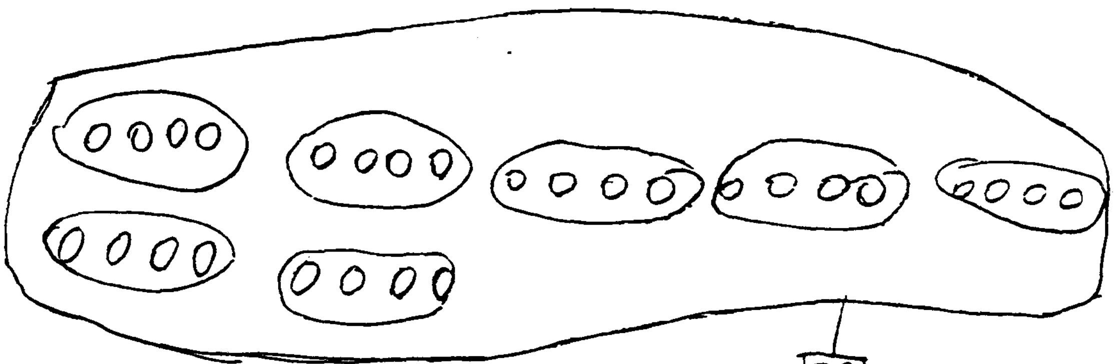
Exemplo 12



# Aluno D14*	# 7 anos 8 meses	# Junho 1º Ano

Exemplo 13

$5 + 3 \times 4 = 17$



$\boxed{28}$

$7 \times 4 = 28$

usou material

# Aluno L3*	# 6 anos 6 meses	# Dezembro 2º Ano

Exemplo 14

$5+4+4+4=17$

$3\times 4+5=17$

$7\times 4=24$

$4+4+4+4+4+4+4=24$

usou material

# Aluno L14*	# 6 anos 9 meses	# Dezembro 2º Ano

Exemplo 15

couberam todos porque tinha 48 cadeiras e as pessoas eram 30.

6 -12 -18 -24 -36 -42 -48 -54 - 60

# Aluno L2*	# 8 anos 1 mês	# Março 2º Ano

Exemplo 16

$$\begin{array}{r} 10 \\ \hline 10 \\ \hline 10 \\ \hline 10 \\ \hline -6 \end{array}$$

$40 - 6 = 34$

$10 + 10 + 10 + 10 - 6 = 34$

$4 \times 10 - 6 = 34$

R. O Luis ficou com 34 preguinhos para jog

2 -

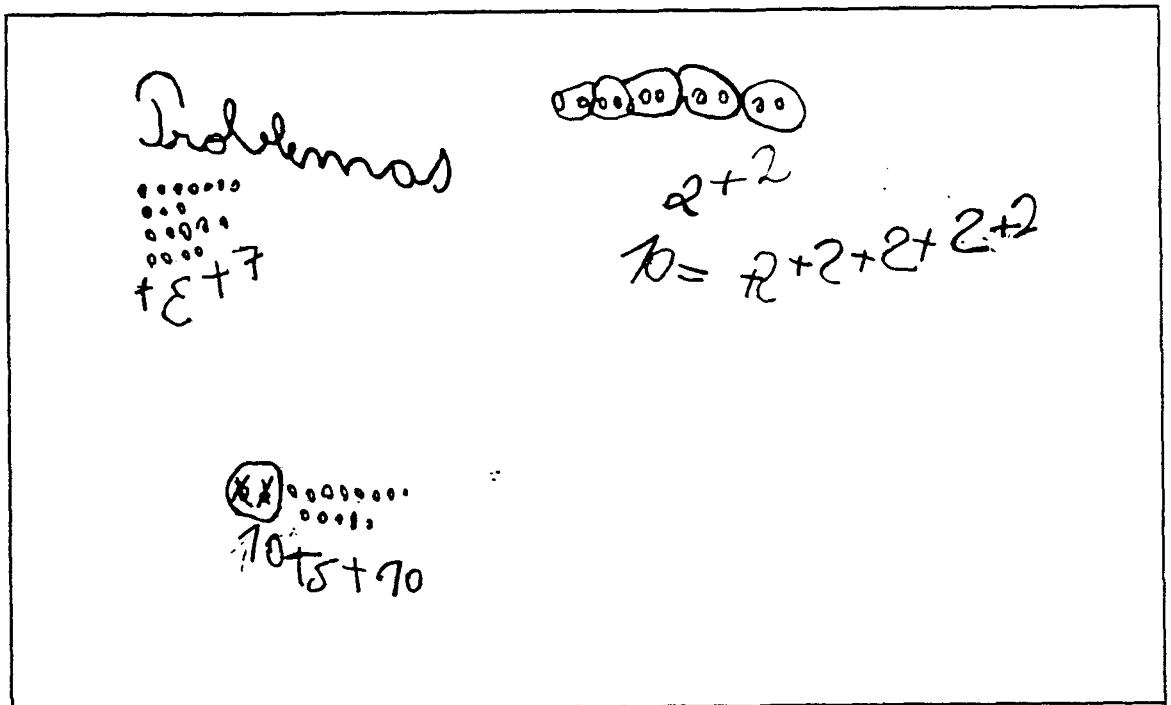
$$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 6 \\ \hline\hline 30 \end{array}$$

$8 \times 6 = 48$

R. Havia cadeiras que chegassem e sobravam 18

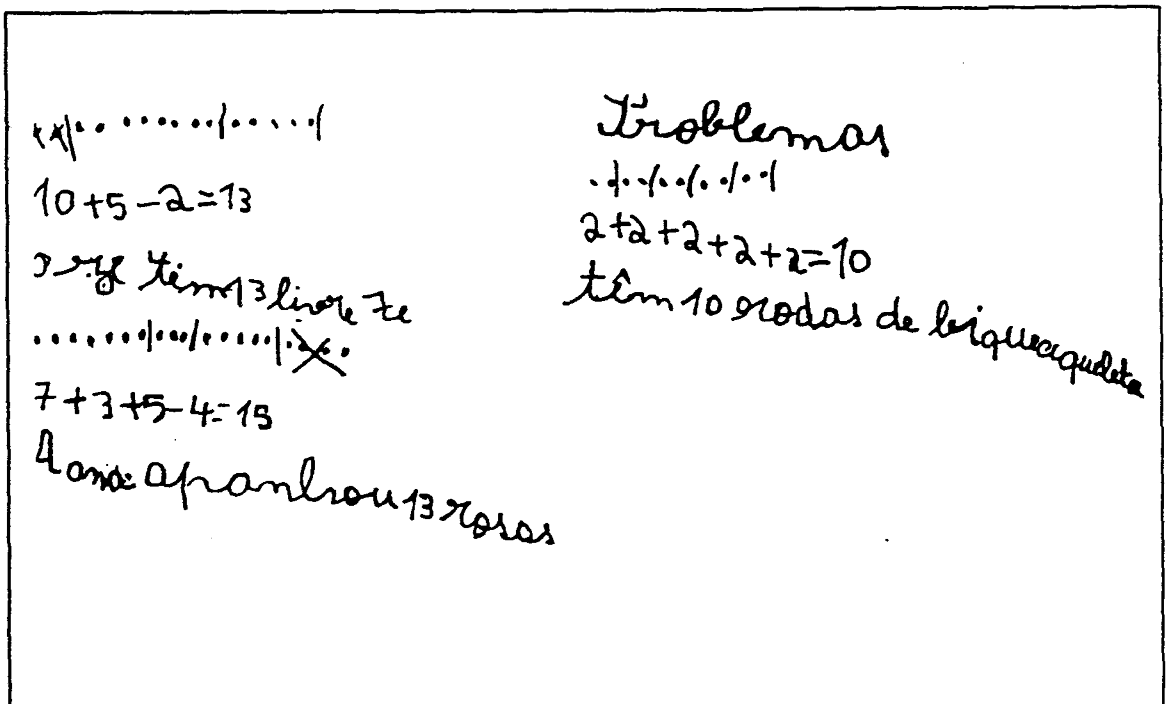
# Aluno H13*	# 7 anos 3 meses	# Março 2º Ano

Exemplo 17



# Aluno O18*	# 8 anos 1 mês	# Junho 1º Ano

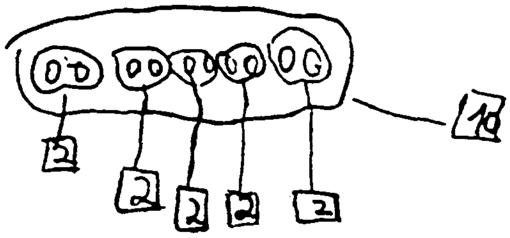
Exemplo 18



# Aluno O16*	# 6 anos 11 meses	# Junho 1º Ano

Exemplo 19

5



5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 70

Aluno B9* 7 anos 5 meses # Junho 1º Ano

Exemplo 20

NA BIBLIOTECA DA AULA DA TERESA HÁ 24 LIVROS.
PARA AS FÉRIAS GRANDES A PROFESSORA DISTRIBUÍU-OS TODOS, DANDO 3 LIVROS A CADA ALUNO.
QUANTOS ALUNOS LEVARAM LIVROS?

24 - 8 X 3 = 0

R: Levaram 8 alunos.

Aluno H14* 8 anos e 3 meses # Junho 2º Ano

Exemplo 21

O LUÍS FOI A LOJA COMPRAR UM CADERNO E UM LÁPIS

PREÇOS: CADERNO 50 ESCUDOS

LÁPIS 20 ESCUDOS

PAGOU COM UMA NOTA DE 100 ESCUDOS.

QUANTO RECEBEU DE TROCO?

100 − (50 + 20) = 30

R. Recebeu 30 00 escudos

# Aluno H21*	# 7 anos e 8 meses	# Junho 2º Ano

Exemplo 22

O LUÍS FOI A LOJA COMPRAR UM CADERNO E UM LÁPIS

PREÇOS: CADERNO 50 ESCUDOS

LÁPIS 20 ESCUDOS

PAGOU COM UMA NOTA DE 100 ESCUDOS.

QUANTO RECEBEU DE TROCO?

100 − (50 + 20) = 30

R: Recebeu de troca 30 escudos

# Aluno H6*	# 7 anos 10 meses	# Junho 2º Ano

Exemplo 23

O LUÍS FOI A LOJA COMPRAR UM CADERNO E UM LÁPIS

PREÇOS: CADERNO 50 ESCUDOS

LÁPIS 20 ESCUDOS

PAGOU COM UMA NOTA DE 100 ESCUDOS.

QUANTO RECEBEU DE TROCO?

$50 + 20 = 70$

$100 - (50 - 20) = 30$

R: O Luís recebeu 30 escudos.

# Aluno H14*	# 8 anos e 3 meses	# Junho 2º Ano

Exemplo 24

O LUÍS FOI A LOJA COMPRAR UM CADERNO E UM LÁPIS

PREÇOS: CADERNO 50 ESCUDOS

LÁPIS 20 ESCUDOS

PAGOU COM UMA NOTA DE 100 ESCUDOS.

QUANTO RECEBEU DE TROCO?

$100 - (50 + 20) = 30$

$$\begin{array}{r} 50\$00 \\ +20\$00 \\ \hline 70\$00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100\$00 \\ -70\$00 \\ \hline 030\$00 \end{array}$$

Recebeu 30 escudos.

# Aluno P22*	# 8 anos e 3 meses	# Junho 2º Ano

Exemplo 25

2. A Mãe comprou para o almoço 15 maçãs e 9 peras.

Almoçaram 7 pessoas.

Se todas comeram o mesmo número de peças de fruta, quantas pode comer cada uma?

$24-3-3-3-3-3-3-3-4=0$

$(7\times 3)+3=24$

R. As pessoas comeram 3 peças de fruta

# Aluno H26*	# 8 anos 8 meses	# Dez 3º Ano

Exemplo 26

1. No passeio à mata apanhámos 43 folhas de árvore.

Na aula colámos as folhas num caderno.

Colocámos 5 folhas em cada página.

Quantas páginas enchemos?

$43-5-5-5-5-5-5-5-5-3=0$

$(8\times 5)+3=43$

R: Era precisou 8 páginas.

# Aluno H23*	# 8 anos 10 meses	# Dezembro 3º Ano

Exemplo 27

.. A Mãe comprou para o almoço 15 maçãs e 9 peras.

Almoçaram 7 pessoas.

Se todas comeram o mesmo número de peças de fruta, quantas pode comer cada uma?

$$\begin{array}{r} 15 \\ +9 \\ \hline 24 \end{array}$$

24 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 4 = 0

(7 × 3) + 4 = 24

$$\begin{array}{r|l} 24 & 8 \\ \cline{2-2} -24 & 3 \\ \hline 00 & \end{array}$$

R. Cada pessoa comeu 3 peças de fruta.

# Aluno H23*	# 8 anos 10 meses	# Dezembro 3º Ano

Exemplo 28

3. INVENTA E ESCREVE AQUI UM PROBLEMA QUE SE POSSA RESOLVER COM UMA MULTIPLICAÇÃO E UMA SUBTRACÇÃO.
RESOLVE O PROBLEMA QUE ESCREVESTE.

Eu tinha 6 caixinhas de bonecas, cada caixa tinha 29 bonecas, a minha irmã partiu 21. Com quantas bonecas fiquei eu?

Dados
6 → 29 Bo
− 21
?

(6 × 29) − 21 = 153 Resolução
(6 × 29) − 21 = 153
174 − 21
153

R: Eu fiquei com 153 bonecas.

# Aluno L2*	# 10 anos 1 mês	# Março 4º Ano

Exemplo 29

2. A MÃE DA MARIA COMPROU 1,5 m DE TECIDO PARA FAZER UMA SAIA.

O TECIDO CUSTOU-LHE 960$00.

QUAL FOI O PREÇO DE CADA METRO DO TECIDO.

1,5 m | 960$00 : 3 = 320$00
960$00 | 2 X 320$00 = 640$00

R: Foi 640$00 o metro de Tecido.

3. INVENTA E ESCREVE AQUI UM PROBLEMA QUE SE POSSA RESOLVER COM UMA MULTIPLICAÇÃO E UMA SUBTRACÇÃO.

RESOLVE O PROBLEMA QUE ESCREVESTE.

Uma loja mandou vir de um armazem 94 de 875 chocolates. O comerciante reparou que 27 estavam fora da data e deitou-os fora. Quantos chocolates tem ainda o comerciante para vender?

0,4 | (94 X 875) - 27 =
875 | = 340 - 27 =
27 | = 313

875
x 0,4
3490

R O comerciante Tem ainda para vender 313 chocolates.

# Aluno M28*	# 10 anos e 2 meses	# Março 4º Ano

Exemplo 30

3. INVENTA E ESCREVE AQUI UM PROBLEMA QUE SE POSSA RESOLVER COM UMA MULTIPLICAÇÃO E UMA SUBTRACÇÃO.
RESOLVE O PROBLEMA QUE ESCREVESTE.

$(25 \times 3) - 34 = 41$ $(25 \times 3) - 3 \ldots$

Eu comprei 25 carteiras de cromos com 3 cromos cada uma e depois dei 34 cromos. Eu quero saber com quantos cromos fiquei?

Dados
$(25 \times 3) - 34$

Resolução
$(25 \times 3) - 34 = 75 - 34 = 41$

R: Fiquei com 41 cromos

# Aluno L24*	# 10 anos e 5 meses	# Março 4º Ano

Exemplo 31

1. O PEDRO FOI À MERCEARIA E À PADARIA FAZER COMPRAS.

LEVOU UMA NOTA DE 500$00.

AO APRESENTAR AS CONTAS À MÃE, ENTREGOU O PAPEL COM A DESPESA DA MERCEARIA

	95$00
	18$50
	47$50
	47$50
	47$50
	120$00
Total	376$00

MAS NÃO SE LEMBRAVA DE QUANTO TINHA PAGO NA PADARIA.

O TROCO ERA: 1 moeda de 50$00

1 moeda de 5$00

QUANTO GASTOU O PEDRO NA PADARIA ?

Dados
500$00
376$00 - mercearia
troco - 55$00
? gastou padaria

Resolução
500$00 - (376$00 + 55$00) = 69$00
500$00 - 431$00 = 69$00.

O Pedro gastou 69$00 na padaria.

# Aluno L17*	# 9 anos e 10 meses	# Maio 4º Ano

Exemplo 32

1. O PEDRO FOI À MERCEARIA E À PADARIA FAZER COMPRAS.

LEVOU UMA NOTA DE 500$00.

AO APRESENTAR AS CONTAS À MÃE, ENTREGOU O PAPEL COM A DESPESA DA MERCEARIA

95$00
18$50
47$50
47$50
47$50
120$00
Total 376$00

MAS NÃO SE LEMBRAVA DE QUANTO TINHA PAGO NA PADARIA.

O TROCO ERA: 1 moeda de 50$00

1 moeda de 5$00

QUANTO GASTOU O PEDRO NA PADARIA ?

500$00

95$00
18$50
47$50
47$50
47$50
120$00
Total 376$00

500$00 - (376$00 + 50$00 + 5$00) =

= 500$00 - 431$00 =

= 69$00

R: gastou 69$00.

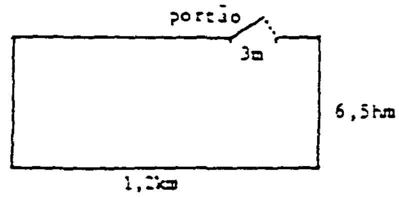
# Aluno M28*	# 10 anos e 4 meses	# Maio 4º Ano

Exemplo 33

1. O PAI DO MÁRIO TEM UM CAMPO EM FORMA DE RECTÂNGULO E QUER COLOCAR-LHE UMA VEDAÇÃO E UM PORTÃO.

O CAMPO TEM 6,5 hm DE LARGURA E 1,2 km DE COMPRIMENTO.

O PORTÃO TEM 3 m DE LARGURA.



QUANTOS QUILÓMETROS DE VEDAÇÃO TEM DE FAZER O PAI DO MÁRIO ?

Dados

6,5 hm

1,2 km

3 m

km de vedação?

Reduções

6,5 hm = 0,65 km

1,2 km = 1,2 km

3 m = 0,003 km

Resolução

0,65 km x 2 + 1,2 km x 2 = 3,70 km

3,70 km - 0,003 km = 3,697 km

Resposta

O pai do Mário tem que 3,697 Kilómetros de vedação.

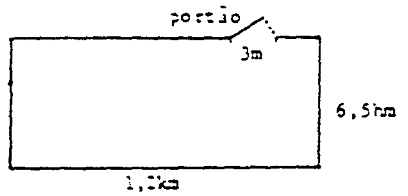
# Aluno L17*	# 9 anos e 8 meses	# Março 4º Ano

Exemplo 34

1. O PAI DO MÁRIO TEM UM CAMPO EM FORMA DE RECTÂNGULO E QUER COLOCAR-LHE UMA VEDAÇÃO E UM PORTÃO.

O CAMPO TEM 6,5 hm DE LARGURA E 1,2 km DE COMPRIMENTO.

O PORTÃO TEM 3 m DE LARGURA.



QUANTOS QUILÓMETROS DE VEDAÇÃO TEM DE FAZER O PAI DA MARIA ?

l = 6,5hm = 0,65 km | (2 × 0,65 km) + (2 × 1,2 km) − 0,003 km =
c = 1,2km | = 1,30 km + 2,4 km − 0,003 km =
3m = 0,003 km | = 3,7 km − 0,003 km =
| = 3,697 km

R O Pai do ~~Mário~~ - Maria Tem de fazer 3,697 km de vedação.

Aluno M28* | # 10 anos e 2 meses | # Março 4º Ano

Exemplo 35

NA BIBLIOTECA DA AULA DA TERESA HÁ 24 LIVROS.
PARA AS FÉRIAS GRANDES A PROFESSORA DISTRIBUÍU-OS TODOS, DANDO 3 LIVROS A CADA ALUNO.
QUANTOS ALUNOS LEVARAM LIVROS?

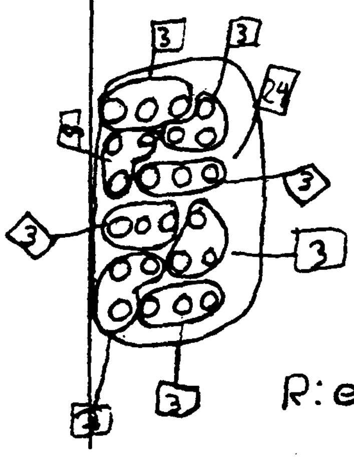
24 

8 Alunos

# Aluno H9*	# 7 anos 7 meses	# Junho 2º Ano

Exemplo 36

NA BIBLIOTECA DA AULA DA TERESA HÁ 24 LIVROS.
PARA AS FÉRIAS GRANDES A PROFESSORA DISTRIBUÍU-OS TODOS, DANDO 3 LIVROS A CADA ALUNO.
QUANTOS ALUNOS LEVARAM LIVROS?

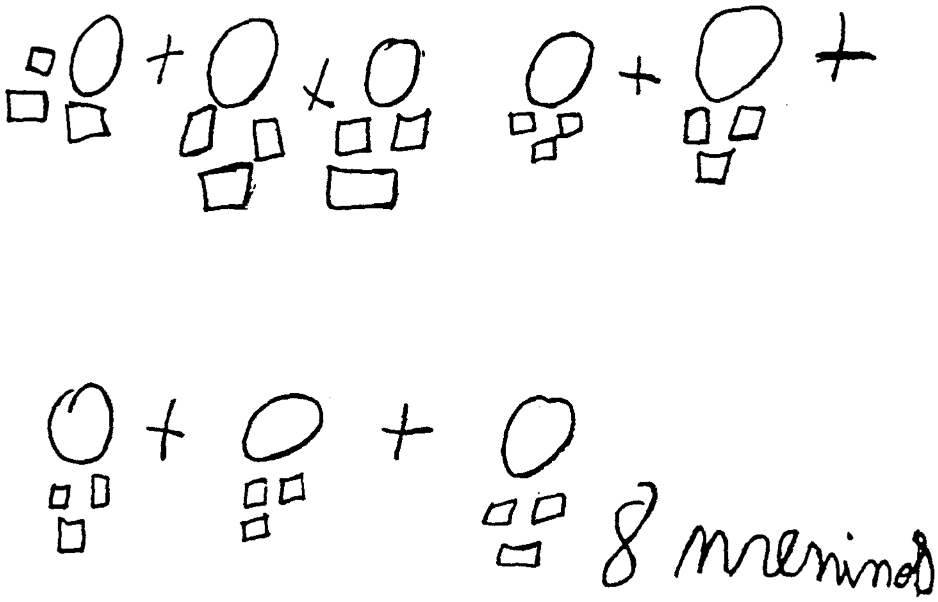


R: a professora deu a 8 alunos.

# Aluno D25*	# 7 anos 8 meses	# Junho 2º Ano

Exemplo 37

NA BIBLIOTECA DA AULA DA TERESA HÁ 24 LIVROS.
PARA AS FÉRIAS GRANDES A PROFESSORA DISTRIBUIU-OS TODOS,
DANDO 3 LIVROS A CADA ALUNO.
QUANTOS ALUNOS LEVARAM LIVROS?



Aluno J16*   # 8 anos 1 mês   # Junho 2º Ano

Exemplo 38

NA BIBLIOTECA DA AULA DA TERESA HÁ 24 LIVROS.
PARA AS FÉRIAS GRANDES A PROFESSORA DISTRIBUÍU-OS TODOS, DANDO 3 LIVROS A CADA ALUNO.
QUANTOS ALUNOS LEVARAM LIVROS?

3+3+3+3+3+3+3+3=24

# Aluno B5*	# 8 anos 1 mês	# Junho 2º Ano

Exemplo 39

NA BIBLIOTECA DA AULA DA TERESA HÁ 24 LIVROS.
PARA AS FÉRIAS GRANDES A PROFESSORA DISTRIBUÍU-OS TODOS, DANDO 3 LIVROS A CADA ALUNO.
QUANTOS ALUNOS LEVARAM LIVROS?

dados
24
3

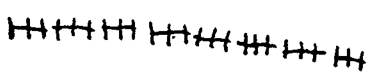
3
6←3
3
12←3
3
18←3
3
24←3

R: Os 24 livros foram distribuídos por 8 meninos.

# Aluno B27*	# 8 anos e 0 meses	# Junho 2º Ano

Exemplo 40

NA BIBLIOTECA DA AULA DA TERESA HÁ 24 LIVROS.
PARA AS FÉRIAS GRANDES A PROFESSORA DISTRIBUÍU-OS TODOS,
DANDO 3 LIVROS A CADA ALUNO.
QUANTOS ALUNOS LEVARAM LIVROS?



levaram livros 8 meninos

24-3-3-3-3-3-3-3-3=8

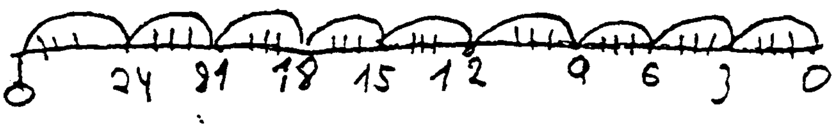
# Aluno H27*	# 8 anos 11 meses	# Junho 2º Ano

Exemplo 41

NA BIBLIOTECA DA AULA DA TERESA HÁ 24 LIVROS.
PARA AS FÉRIAS GRANDES A PROFESSORA DISTRIBUÍU-OS TODOS, DANDO 3 LIVROS A CADA ALUNO.
QUANTOS ALUNOS LEVARAM LIVROS?

$24 - 3 = 21$
$21 - 3 = 18$
$18 - 3 = 15$
$15 - 3 = 12$
$12 - 3 = 9$
$9 - 3 = 6$
$6 - 3 = 3$
$3 - 3 = 0$

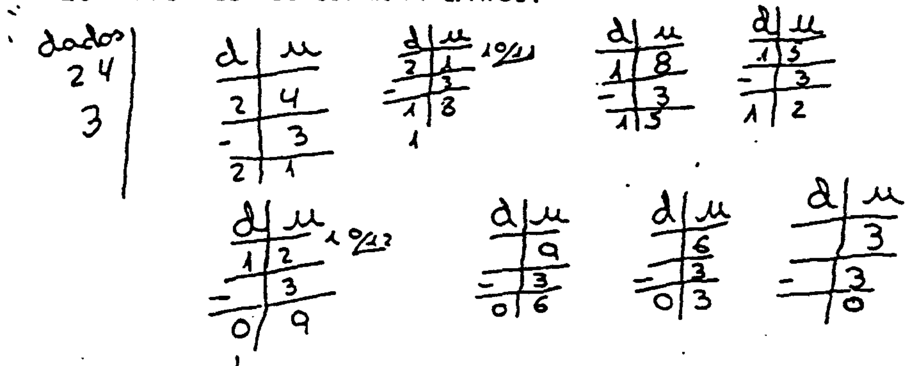
R: deu só para 8 meninos.



Aluno D16* # 8 anos 1 mês # Junho 2º Ano

Exemplo 42

NA BIBLIOTECA DA AULA DA TERESA HÁ 24 LIVROS.
PARA AS FÉRIAS GRANDES A PROFESSORA DISTRIBUIU-OS TODOS,
DANDO 3 LIVROS A CADA ALUNO.
QUANTOS ALUNOS LEVARAM LIVROS?



R: Levaram livros 8 meninos

# Aluno B11*	# 6 anos e 10 meses	# Junho 2º Ano

Exemplo 43

NA BIBLIOTECA DA AULA DA TERESA HÁ 24 LIVROS.
PARA AS FÉRIAS GRANDES A PROFESSORA DISTRIBUÍU-OS TODOS, DANDO 3 LIVROS A CADA ALUNO.
QUANTOS ALUNOS LEVARAM LIVROS?

1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 | 10 11 12 | 13 14 15 | 16 17 18 | 19 20 21 | 22 23 24

$8 \times 3 = 24$

Os alunos levaram 24 livros

# Aluno I15*	# 8 anos 0 meses	# Junho 2º Ano

Exemplo 44

NA BIBLIOTECA DA AULA DA TERESA HÁ 24 LIVROS.
PARA AS FÉRIAS GRANDES A PROFESSORA DISTRIBUÍU-OS TODOS, DANDO 3 LIVROS A CADA ALUNO.
QUANTOS ALUNOS LEVARAM LIVROS?

	D	U
		3
x		8
	2	4

2

	D	U
		3
		3
		3
		3
		3
		3
		3
		3
+	2	4

2

Foram 8 alunos que levaram livros.

# Aluno L4*	# 7 anos 2 meses	# Junho 2º Ano

Exemplo 45

NA BIBLIOTECA DA AULA DA TERESA HÁ 24 LIVROS.
PARA AS FÉRIAS GRANDES A PROFESSORA DISTRIBUÍU-OS TODOS, DANDO 3 LIVROS A CADA ALUNO.
QUANTOS ALUNOS LEVARAM LIVROS?

$8 \times 3 = 24$

$3+3+3+3+3+3+3+3=20$

6 6 6 6

12 12

24

deu para 8 alunos

# Aluno L27*	# 8 anos 6 meses	# Junho 2º Ano

Exemplo 46

NA BIBLIOTECA DA AULA DA TERESA HÁ 24 LIVROS.
PARA AS FÉRIAS GRANDES A PROFESSORA DISTRIBUÍU-OS TODOS, DANDO 3 LIVROS A CADA ALUNO.

QUANTOS ALUNOS LEVARAM LIVROS?

$8 \times 3 = 24 - 3 = 21 - 6 = 18 - 3 = 15 - 3 = 12 - 3 = 9 - 3 =$
$6 - 3 = 3 - 3 = 0$ $\quad 8 \times 3 = 24$

Deu para 8 meninos. $3 \times 8 = 24$

# Aluno L4*	# 7 anos 3 meses	# Junho 2º Ano

Exemplo 47

NA BIBLIOTECA DA AULA DA TERESA HÁ 24 LIVROS.
PARA AS FÉRIAS GRANDES A PROFESSORA DISTRIBUÍU-OS TODOS, DANDO 3 LIVROS A CADA ALUNO.
QUANTOS ALUNOS LEVARAM LIVROS?

$3 \times \boxed{8} = 24$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times\ 3 \\ \hline 24 \end{array}$$

R: A professora distribuimos cadernos todos!

# Aluno P21*	# 7 anos e 10 meses	# Junho 2º Ano

Exemplo 48

NA BIBLIOTECA DA AULA DA TERESA HÁ 24 LIVROS.
PARA AS FÉRIAS GRANDES A PROFESSORA DISTRIBUÍU-OS TODOS, DANDO 3 LIVROS A CADA ALUNO.
QUANTOS ALUNOS LEVARAM LIVROS?

$24 : 3 = 8$

R: Dá para 8 meninos.

# Aluno D10*	# 8 anos e 3 meses	# Junho 2º Ano

Exemplo 49

2. A MÃE COMPROU 1 kg DE CEREJAS NUMA LOJA POR 135$00.
A TIA ANA COMPROU 750 gr DE CEREJAS NOUTRA LOJA POR 90$00.
QUAL DAS DUAS COMPROU AS CEREJAS MAIS BARATAS ?

135$00:4= 33$75
90$00:3 = 30$00

R: Quem comprou as cerejas mais baratas foi a tia porque 250 g das cerejas da tia custam 30$00 e da mãe 33$75

# Aluno D1*	# 10 anos e 5 meses	# Junho 2º Ano

Exemplo 50

2. A MÃE COMPROU 1 kg DE CEREJAS NUMA LOJA POR 135$00.
A TIA ANA COMPROU 750 gr DE CEREJAS NOUTRA LOJA POR 90$00.
QUAL DAS DUAS COMPROU AS CEREJAS MAIS BARATAS ?

Dados	Indicação
1Kg/135$00	750g = 0,750kg
750g/90$00	135$00 : 4 = 33$75
? J.L.M.B.	33$75 x 3 = 101$25
	135$00 - 101$25 = 34$75

R. Quem comprou as cerejas mais baratas foi a tia Ana, porque pagou 34$75 a mais em Kg.

# Aluno I20*	# 10 anos 6 meses	# Maio 4º Ano

Exemplo 51

2. A MÃE COMPROU 1 kg DE CEREJAS NUMA LOJA POR 135$00.
A TIA ANA COMPROU 750 gr DE CEREJAS NOUTRA LOJA POR 90$00.
QUAL DAS DUAS COMPROU AS CEREJAS MAIS BARATAS ?

Resolução

750gr + 250g = 1000g

90$00 : 3 = 30$00

30$00 = 250g

90$00 + 30$00 = 120$00

R: Quem comprou as cerejas mais baratas foi a tia Ana.

# Aluno L7*	# 10 anos 4 meses	# Maio 4º Ano

Exemplo 52

2. A MÃE COMPROU 1 kg DE CEREJAS NUMA LOJA POR 135$00.
A TIA ANA COMPROU 750 gr DE CEREJAS NOUTRA LOJA POR 90$00.
QUAL DAS DUAS COMPROU AS CEREJAS MAIS BARATAS ?

DADOS

1 kg	135$00
750 gr	90$00

90$00 : 3 = 30$00

90$00 : 3 = 30$00

30$00 × 3 = 90$00

30$00 × 4 = 120$00

30$00 × 4 = 120$00

R: Foi a tia Ana que comprou as cerejas mais baratas

# Aluno N4*	# 9 anos 9 meses	# Maio 4º Ano

Exemplo 53

2. A MÃE COMPROU 1 kg DE CEREJAS NUMA LOJA POR 135$00.
A TIA ANA COMPROU 750 gr DE CEREJAS NOUTRA LOJA POR 90$00.
QUAL DAS DUAS COMPROU AS CEREJAS MAIS BARATAS ?

1 kg = 1000 g
135$00 : 1000 g = $13
750 g × $13 = 111$50

135$00 : 1000 = $13
− 1000
0350
− 300
050

750 g
× $13
365
175
111$50

R: A tia Ana foi quem comprou mais baratas.

# Aluno D3*	# 10 e 4 meses	# Junho 4º Ano

Exemplo 54

2. A MÃE COMPROU 1 kg DE CEREJAS NUMA LOJA POR 135$00.
A TIA ANA COMPROU 750 gr DE CEREJAS NOUTRA LOJA POR 90$00.
QUAL DAS DUAS COMPROU AS CEREJAS MAIS BARATAS ?

90$00 : 750 = $12

1 kg = 1000 gr

1000 x $12 = 12$00

9000 | 750
-750 | 12
1500
-1500
0000

R: Quem comprou mais barato foi a tia.

# Aluno D9*	# 10 anos e 3 meses	# Junho 4º Ano

Exemplo 55

2. A MÃE COMPROU 1 kg DE CEREJAS NUMA LOJA POR 135$00.
A TIA ANA COMPROU 750 gr DE CEREJAS NOUTRA LOJA POR 90$00.
QUAL DAS DUAS COMPROU AS CEREJAS MAIS BARATAS ?

135$00 : 1000 gr = 0$13
90$00 : 750 gr = 0$12

135$00 | 1000
100 0 | $13
035 00
-30 00
05 00

90$00 | 750
75 0 | $12
15 00
-15 00
00 00

R.: A Tia Ana comprou as cerejas mais barato

# Aluno D20*	# 9 anos e 8 meses	# Junho 4º Ano

Exemplo 56

2. A MÃE COMPROU 1 kg DE CEREJAS NUMA LOJA POR 135$00.
A TIA ANA COMPROU 750 gr DE CEREJAS NOUTRA LOJA POR 90$00.
QUAL DAS DUAS COMPROU AS CEREJAS MAIS BARATAS ?

Dados

M - 1 kg - 135$00
T - 750 g - 90$00
$ - ?

Resolução

135$00 : 1 kg = 135$00
1 kg = 135$00
90$00 : 0,750 kg =

90$00000 | 0,750
1500 | 120$00
000000

1 kg = 120$00

R: Foi a Tia Ana que comprou as cerejas mais baratas. As cerejas custaram 120$00

# Aluno L8*	# 10 anos 0 meses	# Maio 4º Ano

Exemplo 57

2. A MÃE COMPROU 1 kg DE CEREJAS NUMA LOJA POR 135$00.
A TIA ANA COMPROU 750 gr DE CEREJAS NOUTRA LOJA POR 90$00.
QUAL DAS DUAS COMPROU AS CEREJAS MAIS BARATAS ?

Dados | Cálculo

Mãe 1kg 135$00 | 135$00 x 0,75 = 101$25

tia 750gr 90$00

R: Quem comprou as cerejas mais baratas foi a tia ana

# Aluno J14*	# 10 anos 3 meses	# Maio 4º Ano

Exemplo 58

2. A MÃE COMPROU 1 kg DE CEREJAS NUMA LOJA POR 135$00.
A TIA ANA COMPROU 750 gr DE CEREJAS NOUTRA LOJA POR 90$00.
QUAL DAS DUAS COMPROU AS CEREJAS MAIS BARATAS ?

750 gr : 50gr = 15
90 : 15 = 6
1000 : 50 = 20
6 x 20 = 120

R: Foi a Tia.

# Aluno D33*	# desconhecida	# 4º Ano

Exemplo 59

ANEXO V

CLASSIFICAÇÕES OBTIDAS EM MATEMÁTICA POR ALGUNS ALUNOS DA AMOSTRA NOS ANOS QUE SE SEGUIRAM AO FIM DA EXPERIÊNCIA

CLASSIFICAÇÕES OBTIDAS EM MATEMÁTICA POR ALGUNS ALUNOS DA AMOSTRA NOS ANOS QUE SE SEGUIRAM AO FIM DA EXPERIÊNCIA

Aluno	1987/88	1988/89	1989/90
		7º ano	
(código)	5º ano	6º ano	(1º Per.)
L22	5	5	5
L21	5	4	5
L20	4	5	5
L13	4	3	99%*
L12	4	3	70%*
L6	2	3	80%*
D13	4	4	-
D10	5	5	5
D14	5	5	4
D4	4	4	4
D3	4	3	3
D1	5	5	4
D25	4	3	4
D22	5	4	4
D17	3	3	2
D20	4	4	4
D28	4	2	2
D15	3	4	3
D9	4	4	3
D8	4	3	3

* Classificação do 1º teste

(continuação)

Aluno (código)	1987/88 5º ano	1988/89 7º ano 6º ano	1989/90 (1º Per.)
D33	4	4	-
D6	4	4	4**
D18	3	3	3**
D16	4	3	3**
D27	3	3	3**
D5	3	2	3**
D12	3	3	3**
D11	4	4	4**
D7	3	3	3**
L31	3	3	2
L29	3	3	2
L28	4	3	3
L25	3	3	3
L22	5	4	4
L21	4	4	4
L17	5	5	5
L9	3	3	2
L3	4	5	4
L2	4	3	4

** Aluno repetente do 6º ano